Soluzioni 3-Am3

Dott. Laura Di Gregorio

21 marzo 2003

1. Vogliamo far vedere che vale il teorema delle funzioni implicite nel punto $(x_0, y_0) = (0, -1)$. Risulta:

$$F(0, -1) = 0$$

e

$$F_y(0, -1) = (-e^{x-y} + 2y)\big|_{(0,-1)} = -2 - e \neq 0.$$

Le ipotesi del teorema locale delle funzioni implicite sono verificate, quindi esiste un intorno di $x_0 = 0$ in cui è definita un'unica funzione $y = g(x)$ per cui $F(x, g(x)) = 0$.
Osserviamo ora che, per il teorema sulla regolarità, la g è una funzione infinitamente differenziabile quindi ha senso derivare per trovare i punti stazionari. Scriviamo esplicitamente $F(x, g(x))$:

$$F(x, g(x)) = e^{x-g(x)} + x^2 + g^2(x) - e(x+1) - 1 = 0.$$

Derivo rispetto ad x:

$$F_x(x, g(x)) = [1 - g'(x)]e^{x-g(x)} + 2x + 2g(x)g'(x) - e = 0.$$

Ricavo $g'(x)$ dall'equazione scritta sopra

$$g'(x) = \frac{e - 2x - e^{x-g(x)}}{2g(x) - e^{x-g(x)}}.$$

Calcolando $g'(x)$ nel punto $(0, -1)$, otteniamo

$$g'(x)\big|_{(0,-1)} = 0$$

quindi effettivamente $(0,-1)$ è un punto stazionario per la $g(x)$.
Ora dobbiamo controllare la natura di tale punto stazionario calcolando la derivata seconda.

$$\begin{aligned} g''(x) &= \frac{[-2-(1-g'(x))e^{x-g(x)}][2g(x)-e^{x-g(x)}]}{(2g(x)-e^{x-g(x)})^2} + \\ &- \frac{[2g'(x)-(1-g'(x))e^{x-g(x)}][e-2x-e^{x-g(x)}]}{(2g(x)-e^{x-g(x)})^2}. \end{aligned}$$

Calcolando $g''(x)$ nel punto $(0,-1)$ e ricordando che

$$g'(x)\Big|_{(0,-1)} = 0$$

otteniamo

$$g''(x)\Big|_{(0,-1)} > 0$$

quindi $(0,-1)$ è un punto di minimo locale per $g(x)$.

Supponiamo ora di voler esplicitare la $g(x)$. Possiamo farlo usando lo sviluppo di Taylor nel punto $(0,0)$, dopo aver traslato la coordinata y.
Scriviamo

$$y = t - 1.$$

In questo modo la funzione $F(x,y)$ diventa una funzione di x e t, $\tilde{F}(x,t)$, di cui ha senso fare lo sviluppo di Taylor in un intorno dell'origine.
Otteniamo

$$F(x,y) = \tilde{F}(x,t) = e^{x-t+1} + x^2 + (t-1)^2 - 1 = 0.$$

Ricordiamo lo sviluppo della funzione esponenziale fino al secondo ordine:

$$e^{x-t+1} = 1 + (x-t+1) + \frac{(x-t+1)^2}{2} + o\big((x-t+1)^2\big).$$

Sostituendo questo nella $\tilde{F}(x,t)$, otteniamo:

$$1 + (x-t+1) + \frac{(x-t+1)^2}{2} + o\big((x-t+1)^2\big) + x^2 + (t-1)^2 - 1 = 0.$$

Consideriamo solo i termini di primo ordine

$$1+(x-t+1)+x-t+\frac{1}{2}-2t-ex-e+o(x)+o(t)=0.$$

Cioè, poiché $o(x)=o(t)$:

$$4t=(2-e)x-e+\frac{5}{2}+o(x).$$

Ricaviamo t da questa espressione

$$t=\frac{(2-e)}{4}x-\frac{e}{4}+\frac{5}{8}+o(x).$$

Ora consideriamo i termini fino al secondo ordine

$$\begin{aligned}4t &= (2-e)x-e+\frac{5}{2}+o(x)+\frac{x^2}{2}+\frac{t^2}{2}-xt+x^2+t^2+o\big((x-t+1)^2\big)\\ &= (2-e)x-e+\frac{5}{2}+o(x)+\frac{x^2}{2}+\left[\frac{(2-e)}{4}x-\frac{e}{4}+\frac{5}{8}+o(x)\right]^2+\\ &\quad -x\left[\frac{(2-e)}{4}x-\frac{e}{4}+\frac{5}{8}+o(x)\right]+o\big((x-t+1)^2\big).\end{aligned}$$

Osserviamo che

$$x^2+t^2\geq 2xt$$

da cui segue

$$o(x^2)+o(t^2)\geq o(xt).$$

Quindi otteniamo che

$$4t=(2-e)x-e+\frac{5}{2}+\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{2}\left[\frac{(2-e)}{4}x-\frac{e}{4}+\frac{5}{8}\right]^2-x\left[\frac{(2-e)}{4}x-\frac{e}{4}+\frac{5}{8}\right]+o(x^2)$$

dove ho usato anche il fatto che $o(x^2)=o(t^2)$.
Sostituendo

$$t=y+1$$

otteniamo una forma esplicita della funzione $y = g(x)$

$$\begin{aligned} y \;&=\; g(x) = \frac{1}{4}\Big\{ -1 + (2-e)x - e + \frac{5}{2} + \frac{3}{2}x^2 + \\ &+\frac{3}{2}\Big[\frac{(2-e)}{4}x - \frac{e}{4} + \frac{5}{8}\Big]^2 - x\Big[\frac{(2-e)}{4}x - \frac{e}{4} + \frac{5}{8}\Big] + o(x^2)\Big\}. \end{aligned}$$

Ricordiamo che la forma esplicita ottenuta della funzione $g(x)$ vale solo localmente in un intorno piccolo del punto $(0, -1)$ e che tale espressione dipende dall'ordine di infinitesimo considerato.

2. Essendo

$$F_y(x, y) = x^2 + e^{x-y} > 0 \qquad\qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

vale il teorema delle funzioni implicite nella versione *globale* per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Infatti vale che

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} = \pm\infty$$

quindi per ogni $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ esiste un $\bar{y}$ che verifica l'equazione $F(x, y) = 0$; inoltre la monotonia della F rispetto ad y mi dice che tale $\bar{y}$ è unico.

Essendo $F \in C^\infty$ anche $g \in C^\infty$ per il teorema sulla regolarità.

Calcoliamo la derivata prima di g:

$$F_x(x, g(x)) = 2xg(x) + x^2 g'(x) + e^{x+g(x)}(1 + g'(x)) = 0.$$

Ricavo $g'(x)$ e la calcolo in $x = 2$

$$g'(x)\Big|_{x=2} = \frac{-2xg(x) - e^{x+g(x)}}{x^2 + e^{x+g(x)}} = \frac{-2xg(x) + x^2 g(x)}{x^2 - x^2 g(x)}\Bigg|_{x=2} = 0.$$

quindi $x = 2$ è un punto stazionario per $g(x)$.
Calcoliamo $g''(x)$:

$$g''(x)\Big|_{x=2} \;=\; \frac{[g'(x)(x-2) + g(x)][x(1 - g(x))]}{x^2(1 - g(x))^2} +$$

$$
\begin{aligned}
& \left. + \frac{[1-g(x)-xg'(x)](2-x)g(x)}{x^2(1-g(x))^2} \right|_{x=2} \\
= \quad & \frac{g(2)}{2(1-g(2))} < 0
\end{aligned}
$$

perché g può assumere solo valori negativi. Segue che $x = 2$ è punto di massimo relativo per la $g(x)$.

3. Osserviamo che la funzione a destra dell'uguale è Lipschitziana quindi c'è esistenza e unicità locale.
Inoltre la soluzione è monotona crescente, tranne che per $x = 0$.

<u>*Caso* $\alpha = 0$</u>: abbiamo che $x \equiv 0$ è l'unica soluzione dell'equazione differenziale, quindi la retta $x = 0$ è una barriera che non può essere attraversata per l'unicità.

<u>*Caso* $\alpha > 0$</u>: osserviamo subito che se partiamo con dato iniziale $\alpha > 0$ la soluzione rimane nel semipiano $x > 0$ perché nessun'altra soluzione può intersecare la retta $x = 0$.
Con il metodo di separazione delle variabili otteniamo

$$\int_\alpha^{x(t)} \frac{d\xi}{\xi^{3/2}} = e^t - 1$$

da cui segue che

$$\left. -\frac{2}{\xi^{3/2}} \right|_\alpha^{x(t)} = e^t - 1$$

con $x(t) > 0$.
Quindi la soluzione in questo caso è:

$$x(t) = \frac{4\alpha}{[2-(e^t-1)\sqrt{\alpha}]^2}.$$

Questa soluzione esiste se

$$2 - (e^t - 1)\sqrt{\alpha} \neq 0.$$

Il tempo di esplosione della soluzione è dunque quello per cui

$$2 - (e^t - 1)\sqrt{\alpha} = 0,$$

cioè

$$t^* = \log\left(1 + \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\right) > 0.$$

Essendo la soluzione monotona crescente in questo intervallo e uniformemente limitata per $x \longrightarrow -\infty$, ho che l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è

$$I_1 = (-\infty, t^*).$$

<u>*Caso* $\alpha < 0$</u>: analogamente al caso precedente se parto con dato iniziale $\alpha < 0$ la soluzione rimane nel semipiano $x < 0$.
Con il metodo di separazione delle variabili otteniamo

$$\int_{\alpha}^{x(t)} \frac{d\xi}{(-\xi)^{3/2}} = e^t - 1$$

da cui segue che

$$\left.\frac{2}{(-\xi)^{3/2}}\right|_{\alpha}^{x(t)} = e^t - 1$$

con $x(t) < 0$.
Quindi la soluzione in questo caso è:

$$x(t) = \frac{4\alpha}{[2 + (e^t - 1)\sqrt{-\alpha}\,]^2}.$$

Analogamente al caso precedente, devo controllare per quali tempi il denominatore si annulla

$$2 + (e^t - 1)\sqrt{-\alpha} = 0.$$

Questa equazione non ha soluzioni se $\alpha \geq -4$, quindi ho esistenza e unicità globali nel semipiano $x < 0$ perché il denominatore non si annulla mai, cioè l'intervallo massimale di esistenza è

$$I_2 = (-\infty, +\infty).$$

Se $\alpha < -4$ la soluzione esplode in

$$t^{**} = \log\left(1 - \frac{2}{\sqrt{-\alpha}}\right)$$

e, essendo monotona crescente, l'intervallo massimale di esistenza in questo caso è

$$I_3 = (t^{**}, +\infty).$$