Soluzioni 2-Am3

Dott. Laura Di Gregorio

14 marzo 2003

Troviamo la soluzione esplicita del problema di cui abbiamo fatto uno studio qualitativo:

$$\begin{cases} y'(x) = y^2(x) - 1 \\ y(0) = \alpha \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Con il metodo di separazione delle variabili otteniamo

$$\int_{\alpha}^{y(x)} \frac{dz}{z^2 - 1} = \int_0^x dt$$

cioè

$$\left\{ \frac{1}{2} \log \left| \frac{z-1}{z+1} \right| \right\}_{\alpha}^{y(x)} = x.$$

Da questa ricaviamo che

$$\log \left| \frac{y(x) - 1}{y(x) + 1} \right| = \log \left| \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right| + 2x$$

ovvero

$$\left| \frac{y(x) - 1}{y(x) + 1} \right| = \left| \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right| e^{2x}.$$

Possiamo togliere il modulo perché il segno del primo membro è lo stesso del secondo membro.
Esplicitando la y, abbiamo che

$$y(x) = \frac{\alpha + 1 + (\alpha - 1)e^{2x}}{\alpha + 1 - (\alpha - 1)e^{2x}}.$$

Vediamo per quali valori di x questa funzione non è ben definita.
Dobbiamo escludere i valori per cui

$$\alpha + 1 - (\alpha - 1)e^{2x} = 0$$

al variare del parametro α.
Deve essere

$$e^{2x} = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}. \tag{1}$$

Distinguiamo due casi:

- il caso $\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1} \leq 0$ che corrisponde a $|\alpha| \leq 1$;
- il caso $\dfrac{\alpha+1}{\alpha-1} > 0$ che corrisponde a $|\alpha| > 1$.

Caso $|\alpha| \leq 1$:

E' evidente che in questa situazione non esiste x che verifica la (1) perché il membro destro dell'equazione assume solo valori positivi. Questo mi dice che non ci sono valori per cui la soluzione trovata non è ben definita, cioè, per $|\alpha| \leq 1$ l'intervallo massimale di esistenza della soluzione è

$$I_1 = (-\infty, +\infty).$$

Caso $|\alpha| > 1$:

In questo caso esiste x^* per cui (1) ammette soluzione. Questo x^* è il valore per cui la soluzione non è più ben definita, cioè è l'asintoto verticale del blow-up. L'intervallo massimale di esistenza della soluzione è

$$I_2 = (-\infty, x^*).$$