1 Introduzione all'integrale di Riemann in $\mathbb{R}^2$

1.1 Definizioni

(i) Si ricorda che un **intervallo** di $\mathbb{R}$ è un sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}$. Un intervallo si dice **non degenere** se ha interno non vuoto. Un **rettangolo** di $\mathbb{R}^2$ è il prodotto cartesiano di due intervalli di $\mathbb{R}$. Un rettangolo si dice **non degenere** se ha interno non vuoto (naturalmente rispetto alla topologia standard di $\mathbb{R}^2$).

(ii) $E \subset \mathbb{R}^2$ si dice **elementare** se $E = \bigcup_{I=1}^{N} R_i$ con R_i rettangoli limitati a due a due disgiunti.

(iii) Una collezione finita di intervalli $\{I_i\} := \{I_i : 1 \leq i \leq N\}$ è una **partizione** dell'intervallo I se gli I_i sono a due a due disgiunti e $I = \bigcup_{I=1}^{N} I_i$. Una collezione finita di rettangoli $\{R_{ij} : 1 \leq i \leq N,\ 1 \leq j \leq M\}$ è una **partizione** del rettangolo $E := I \times J$ se $R_{ij} = I_i \times J_j$ e se $\{I_i : 1 \leq i \leq N\}$ è una partizione dell'intervallo I e $\{J_j : 1 \leq j \leq M\}$ è una partizione dell'intervallo J. Chiaramente gli R_{ij} sono a due a due disgiunti e la loro unione è uguale a[1] E.

(iv) Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo limitato e non degenere; $f : E \to \mathbb{R}$ si dice **a scalini** se[2] $f = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{R_i}$ con $c_i \in \mathbb{R}$ e R_i rettangoli limitati a due a due disgiunti. La classe delle funzioni a scalini su E (rettangolo limitato e non degenere) si denota con $S(E)$.

(v) Se I ed $R = I \times J$ sono, rispettivamente, un intervallo limitato di $\mathbb{R}$ ed un rettangolo limitato di $\mathbb{R}^2$, definiamo la **misura**, rispettivamente, **unidimensionale** e **bidimensionale** di I ed R come

$$\mathrm{mis}_1(I) = b - a \ , \qquad \mathrm{mis}_2(R) = (b-a)(d-c) \ , \tag{1.1}$$

dove

$$a = \inf I \ , \quad b = \sup I \ , \quad c = \inf J \ , \quad d = \sup J \ .$$

(vi) Se $f = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{R_i} \in S(E)$, E rettangolo limitato e non degenere e R_i a due a due disgiunti, definiamo **l'integrale di Riemann** di f su E come

$$\int_E f := \int_E f(x,y)\,dxdy := \sum_{i=1}^{N} c_i \, \mathrm{mis}_2(R_i) \ . \tag{1.2}$$

[1] In vari testi (incluso il mio) per "partizione del rettangolo E" si intende semplicemente una collezione finita di rettangoli a due a due disgiunti la cui unione è uguale ad E. La definizione data qui di partizione è più restrittiva.

[2] χ_A denota la funzione caratteristica (o indicatrice) di A: $\chi_A(x,y)$ vale uno se $(x,y) \in A$ e zero altrimenti.

Se $A := \bigcup_{i=1}^N R_i \subset E$ è un insieme elementare (con gli R_i a due a due disgiunti) definiamo la **misura di** A come

$$\mathrm{mis}_2(A) := \sum_{i=1}^N \mathrm{mis}_2(R_i) \; = \int_E \sum_{i=1}^N \chi_{R_i} \; . \tag{1.3}$$

(vii) Sia E un rettangolo limitato e non degenere. Una funzione limitata $f : E \to \mathbb{R}$ si dice **integrabile secondo Riemann** se $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists$ due funzioni a scalini $f_i \in S(E)$ tali che $f_1 \leq f \leq f_2$ e

$$\int_E f_2 - \int_E f_1 \leq \varepsilon \; ; \tag{1.4}$$

la classe di funzioni integrabili secondo Riemann su E si denota $\mathcal{R}(E)$.

Se $f \in \mathcal{R}(E)$, gli insiemi

$$\Big\{ \int_E f_1 : f_1 \in S(E) \text{ e } f_1 \leq f \Big\} \; , \qquad \Big\{ \int_E f_2 : f_1 \in S(E) \text{ e } f_2 \geq f \Big\} \tag{1.5}$$

sono (grazie a (1.5)) contigui e l'elemento di separazione, per definizione, è **l'integrale di Riemann di f su E** e si denota con $\int_E f = \int_E f(x,y)dxdy$; in altri termini

$$\int_E f = \sup_{\substack{f_1 \in S(E) \\ f_1 \leq f}} \int_E f_1 = \inf_{\substack{f_2 \in S(E) \\ f_2 \geq f}} \int_E f_2 \; . \tag{1.6}$$

(viii) Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo limitato e non degenere. Un insieme $A \subset E$ si dice **misurabile secondo Peano-Jordan** se $\chi_A \in \mathcal{R}(E)$; in tal caso si pone

$$\mathrm{mis}_2(A) := \int_E \chi_A \; . \tag{1.7}$$

(ix) Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un rettangolo limitato e non degenere, sia $A \subset E$ un insieme misurabile (secondo Peano-Jordan) e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Diremo che f è *integrabile (secondo Riemann) su* A se la funzione

$$f_A(x) := \begin{cases} f(x) \; , & \text{se } x \in A \; , \\ 0 \; , & \text{se } x \notin A \; , \end{cases} \tag{1.8}$$

è integrabile secondo Riemann su E; se f è integrabile su A poniamo

$$\int_A f := \int_E f_A \; . \tag{1.9}$$

Se A è misurabile denotiamo con $\mathcal{R}(A)$ la classe delle funzioni integrabili su A.

1.2 Osservazioni

Da qui in avanti $E := I \times J$ denota un prefissato rettangolo limitato e non degenere in $\mathbb{R}^2$.

(1) Dato un insieme elementare $A \subset E$ non è difficile mostrare che *esiste sempre una partizione* $\{R_{ij}\}$ *di* E *tale che* $A = \bigcup_{(i,j)\in\mathcal{I}} R_{ij}$ *dove* $\mathcal{I}$ *è un sottoinsieme degli indici* $\{(i,j)\}$.

(2) Analogamente, data $f \in S(E)$ *esistono sempre una partizione* $\{R_{ij}\}$ *di* E *e numeri* $c_{ij} \in \mathbb{R}$ *tali che* $f = \sum_{i,j} c_{ij}\chi_{R_{ij}}$.

(3) Date due partizioni di E, $\{R_{ij}\}$ e $\{R'_{kl}\}$, esiste sempre una terza partizione di E, $\{\overline{R}_{mn}\}$, tale che per ogni (m,n) esistono (i,j) e (k,l) tali che

$$\overline{R}_{mn} \subset R_{ij} \ , \qquad \overline{R}_{mn} \subset R'_{kl} \ ; \tag{1.10}$$

esiste un'unica partizione che soddisfi (1.10) e che contenga il minor numero possibile di rettangoli: tale partizione prende il nome di **partizione unione** di $\{R_{ij}\}$ e $\{R'_{kl}\}$.

(4) L'intersezione di due intervalli è un intervallo e, analogamente, l'intersezione di due rettangoli è un rettangolo (**esercizio**). In generale, l'unione di due rettangoli *non* è un rettangolo. D'altra parte, usando (1)÷(3), non è difficile mostrare che *la classe dei sottoinsiemi elementari di un rettangolo fissato è chiusa sia rispetto alla intersezione che rispetto alla unione.*

(5) Da (1)÷(3) segue anche che *se* $f, g \in S(E)$ *allora esiste una partizione di* E, $\{R_{ij}\}$, *e numeri* c_{ij} *e* d_{ij} *tali che*

$$f = \sum_{i,j} c_{ij}\chi_{R_{ij}} \ , \qquad g = \sum_{i,j} d_{ij}\chi_{R_{ij}} \ . \tag{1.11}$$

(6) Da (5) segue immediatamente che *se* $f, g \in S(E)$ *allora* $fg, f+g \in S(E)$. Infatti se f e g sono come in (1.11) allora

$$fg = \sum_{i,j} c_{ij}d_{ij}\chi_{R_{ij}} \ , \qquad f+g = \sum_{i,j}(c_{ij}+d_{ij})\chi_{R_{ij}} \ . \tag{1.12}$$

In particolare, si ha che

$$\int_E (f+g) = \sum_{i,j}(c_{ij}+d_{ij}) \operatorname{mis}_2 R_{ij} = \int_E f + \int_E g \ . \tag{1.13}$$

(7) Da (6) e dalla definizione di integrale di Riemann segue che *se* $f, g \in \mathcal{R}(E)$ *allora* $fg, f+g \in \mathcal{R}(E)$*; inoltre*

$$\int_E f \geq 0 \qquad \text{se} \quad f \geq 0\ , \qquad\qquad (\text{“positivitá”}) \qquad (1.14)$$

$$\int_E (f+g) = \int_E f + \int_E g\ , \qquad\qquad (\text{“linearitá”}) \qquad (1.15)$$

$$\Big|\int_E f\Big| \leq \int_E |f|\ . \qquad (1.16)$$

Come nel caso unidimensionale (1.16) è conseguenza di (1.14) ed (1.15) (poiché $|f| \pm f \geq 0$).

(8) Dalle definizioni date segue che se $A, B \subset E$ sono insiemi disgiunti misurabili (second Peano-Jordan) e se $f \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$ allora $f \in \mathcal{R}(A \cup B)$ e

$$\int_{A\cup B} f = \int_A f + \int_B f\ , \qquad\qquad (\text{“additivitá”})\ . \qquad (1.17)$$

1.3 Integrazione di funzioni continue su rettangoli

Proposizione 1 $C(\overline{E}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{R}(E)$.

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Poiché f è continua sul compatto $\overline{E}$, f è uniformemente continua su E e dunque esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x,y) - f(x',y')| < \frac{\varepsilon}{\mathrm{mis}_2(E)}\ , \qquad \forall\ (x,y), (x'y') \in E:\ |(x,y)-(x',y')|_\infty \leq \delta\ . \quad (1.18)$$

Sia ora $\{R_{ij}\}$ una qualunque partizione di E tale che i lati di ogni rettangolo R_{ij} non ecceda δ. Allora,

$$|f(x,y) - f(x',y')| \leq \sup_{R_{ij}} f - \inf_{R_{ij}} f \leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{mis}_2(E)}\ , \qquad \forall\ (x,y), (x'y') \in R_{ij}\ , \qquad (1.19)$$

(poiché, se $(x,y), (x'y') \in R_{ij}$ allora $|(x,y)-(x',y')|_\infty \leq \delta$). Sia ora

$$f_1 := \sum_{i,j} \alpha_{ij} \chi_{R_{ij}}\ , \qquad f_2 := \sum_{i,j} \beta_{ij} \chi_{R_{ij}} \qquad (1.20)$$

con

$$\alpha_{ij} := \inf_{R_{ij}} f\ , \qquad \beta_{ij} := \sup_{R_{ij}} f\ . \qquad (1.21)$$

Chiaramente $f_k \in S(E)$ e, da (1.19) segue che

$$\int_E f_2 - f_1 = \sum_{i,j} (\beta_{ij} - \alpha_{ij})\, \mathrm{mis}_2(R_{ij}) \leq \frac{\varepsilon}{\mathrm{mis}_2(E)} \sum_{i,j} \mathrm{mis}_2(R_{ij}) = \varepsilon\ ,$$

il che dimostra che $f \in \mathcal{R}(E)$. ∎

Osservazione 2 Dalla dimostrazione appena fatta segue immediatamente che dati $f \in C(\overline{E})$ ed $\varepsilon > 0$, se scegliamo $\delta > 0$ come in (1.18), allora *per ogni partizione* $\{R_{ij}\}$ *con rettangoli di lati non più grandi di* δ, *per ogni scelta di punti* $(x_{ij}, y_{ij}) \in R_{ij}$ *si ha che*

$$\Big|\int_E f \ - \sum_{ij} f(x_{ij}, y_{ij})\,\mathrm{mis}_2(R_{ij})\Big| \leq \varepsilon \ , \tag{1.22}$$

(si noti che $\alpha_{ij} \leq f(x_{ij}, y_{ij}) \leq \beta_{ij}$). La somma in (1.22) prende il nome di **approssimante di Riemann**. In particolare presa una qualunque successione $\delta_k \to 0$ e fissate una sucessione di partizioni $\{R_{ij}^{(k)}\}$ con rettangoli di lati non più grandi di δ_k e scelti arbitrariamente punti $(x_{ij}^{(k)}, y_{ij}^{(k)}) \in R_{ij}^{(k)}$, allora

$$\int_E f = \lim_{k\to\infty} \sum_{i,j} f(x_{ij}^{(k)}, y_{ij}^{(k)})\,\mathrm{mis}_2(R_{ij}^{(k)}) \ , \tag{1.23}$$

(chiaramente anche l'insieme degli indici dove variano i, j nella somma in (1.23) dipendono da k).

Proposizione 3 *Sia* $f \in C(\overline{E})$ *(con* $\overline{E} = [a,b] \times [c,d]$*). Allora le funzioni*

$$y \to \int_a^b f(x,y)dx \ , \qquad x \to \int_c^d f(x,y)dy \ , \tag{1.24}$$

sono funzioni continue su, rispettivamente, $[c,d]$ *e* $[a,b]$ *e si ha che*

$$\int_E f = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx \ . \tag{1.25}$$

Dimostrazione Sia $\varepsilon > 0$. Poiché f è uniformemente continua su $\overline{E}$, esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon/(b-a)$ per ogni

$$(x,y),\ (x'y') \in \overline{E} : \quad |(x,y) - (x',y')|_\infty \leq \delta \ . \tag{1.26}$$

Se y e y' sono due punti di $[c,d]$ con $|y - y'| < \delta$ allora $|(x,y) - (x,y')|_\infty \leq \delta$ e dunque

$$\begin{aligned} \Big|\int_a^b f(x,y)dx - \int_a^b f(x,y')dx\Big| &= \Big|\int_a^b \Big(f(x,y) - f(x,y')\Big)dx\Big| \\ &\leq \int_a^b \Big|f(x,y) - f(x,y')\Big|dx \\ &\leq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon \ , \end{aligned}$$

il che dimostra che $y \to \int_a^b f(x,y)dx$ è continua su $[c,d]$. Scambiando il ruolo della x e della y si ottiene che anche che la funzione $x \to \int_c^d f(x,y)dy$ è continua su $[a,b]$.

Dimostriamo, ora, la prima uguaglianza in (1.25). Sia $\varepsilon > 0$, sia δ tale che valga (1.18) e sia $\{R_{ij}\} := \{I_i \times J_j\}$ una partizione di E formata da rettangoli di lati non più grandi di

δ. Come nella dimostrazione della Proposizione 1, vale (1.19). Scegliamo arbitrariamente $x_i \in I_i$ e $y_j \in J_j$. Per (1.18) (ed usando le proprietà discusse nella sezione precedente) si ha che

$$\begin{aligned}
\Big|\int_E f - \sum_{i,j} f(x_i,y_j)\,\mathrm{mis}_2(R_{ij})\Big| &= \Big|\sum_{i,j}\int_{R_{ij}} f - \sum_{i,j} f(x_i,y_j)\,\mathrm{mis}_2(R_{ij})\Big| \\
&= \Big|\sum_{i,j}\int_{R_{ij}} \Big(f(x,y) - f(x_i,y_j)\Big)dxdy\Big| \\
&\le \sum_{i,j}\int_{R_{ij}} \Big|f(x,y) - f(x_i,y_j)\Big|dxdy \\
&\le \sum_{i,j}\int_{R_{ij}} \frac{\varepsilon}{\mathrm{mis}_2(E)}dxdy \\
&= \frac{\varepsilon}{\mathrm{mis}_2(E)}\sum_{i,j}\mathrm{mis}_2(R_{ij}) \\
&= \varepsilon\ ; \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i,j} f(x_i,y_j)\,\mathrm{mis}_2(R_{ij}) - \sum_j \Big(\int_a^b f(x,y_j)dx\Big)\,\mathrm{mis}_1(J_j)\Big| \\
&\qquad = \Big|\sum_j \Big(\sum_i f(x_i,y_j)\,\mathrm{mis}_1(I_i) - \int_a^b f(x,y_j)dx\Big)\,\mathrm{mis}_1(J_j)\Big| \\
&\qquad = \Big|\sum_j \Big(\sum_i \int_{I_i}\Big(f(x_i,y_j) - f(x,y_j)dx\Big)\,\mathrm{mis}_1(J_j)\Big| \\
&\qquad \le \sum_j \Big(\sum_i \int_{I_i}\Big|f(x_i,y_j) - f(x,y_j)dx\Big|\Big)\,\mathrm{mis}_1(J_j) \\
&\qquad \le \sum_j \Big(\sum_i \int_{I_i}\frac{\varepsilon}{\mathrm{mis}_2(E)}dx\Big)\,\mathrm{mis}_1(J_j) \\
&\qquad = \sum_{i,j}\frac{\varepsilon}{\mathrm{mis}_2(E)}\,\mathrm{mis}_1(I_i)\,\mathrm{mis}_1(J_j) \\
&\qquad = \varepsilon\ ; \qquad (1.28)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_j \Big(\int_a^b f(x,y_j)dx\Big)\,\mathrm{mis}_1(J_j) - \int_c^d\Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy\Big| \\
&\qquad = \Big|\sum_j \int_{J_j}\Big(\int_a^b f(x,y_j)dx - \int_a^b f(x,y)dx\Big)dy\Big| \\
&\qquad \le \sum_j \int_{J_j}\Big(\int_a^b\Big|f(x,y_j) - f(x,y)\Big|dx\Big)dy| \\
&\qquad \le \sum_j \int_{J_j}\Big(\int_a^b\frac{\varepsilon}{\mathrm{mis}_2(E)}dx\Big)dy| \\
&\qquad = \varepsilon\ . \qquad (1.29)
\end{aligned}$$

Mettendo insieme (1.27), (1.28) e (1.29) otteniamo che

$$\Big|\int_E f - \int_c^d \Big(\int_a^b f(x,y)dx\Big)dy\Big| \leq 3\varepsilon \ ,$$

che, per l'arbitrarietà di ε, dimostra la prima uguaglianza in (1.25). Scambiando il ruolo di x con y si ottiene anche che

$$\int_E f = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x,y)dy\Big)dx \ . \qquad \blacksquare$$