ESERCITAZIONE -AM3- 10/03/2003

Dott. Laura Di Gregorio
Prof. Luigi Chierchia

Esercizio 1

Dimostrare che lo spazio delle matrici $\mathbf{Mat}_{\mathbb{R}}(n \times m)$ con norma

$$\|A\| = \sup_{\{\underline{x}\,:\,|\underline{x}| \neq 0\}} |Ax|$$

è uno spazio di Banach.

Esercizio 2

Diamo prima la seguente

Definizione. *Due norme $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ su uno spazio vettoriale X si dicono equivalenti se esistono due costanti positive k_1 e k_2 tali che*

$$k_1\|u\|_a \leq \|u\|_b \leq k_2\|u\|_a\,, \qquad \forall u \in X.$$

Dimostrare che le seguenti norme su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti:

$$\|\underline{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|; \qquad \|\underline{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}; \qquad \|\underline{x}\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Esercizio 3

Sia $X = C([0,1], \mathbb{R})$. Dimostrare che la funzione

$$F : (X, \|\cdot\|_\infty) \longrightarrow (X, \|\cdot\|_{L^1})$$
$$u \longmapsto F(u)$$

definito da

$$F(u)(x) = u(x^2)$$

è continuo.