

4 Il logaritmo complesso

4.1 L'esponenziale, le funzioni trigonometriche e iperboliche in campo complesso

In questo paragrafo si ricordano le definizioni dell'esponenziale, delle funzioni trigonometriche e iperboliche in campo complesso ed alcune proprietà di esse¹.

$$\begin{aligned}\exp(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \\ \text{sen}(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},\end{aligned}\tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\cos(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!}, \\ \text{senh}(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}, \\ \text{cosh}(z) &:= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Teorema 1 (Teorema di addizione) $\exp(zw) = \exp(z) \exp(w)$, $\forall z, w \in \mathbb{C}$.

Definizione 2 (Pi greco) $\pi := 2 \inf \{x > 0 : \cos x = 0\}$.

Teorema 3

(1) Per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| = 1$, esiste un unico $t \in [0, 2\pi)$ tale che

$$\exp(it) = z.$$

(2) per ogni $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, esiste $w \in \mathbb{C}$ tale che

$$\exp(w) = z.$$

(3) $\exp(z) = \exp(w)$ se e solo se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $z - w = 2\pi ki$.

Si ricorda anche che, se e denota il numero (trascendente) di Nepero

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.7182818284590452353602874713526624977572470937\dots,$$

allora

$$e^x = \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.\tag{4.3}$$

¹Per le dimostrazioni si veda W. Rudin *Principi di Analisi Matematica*, McGraw-Hill 1991 oppure L. Chierchia *Lezioni di Analisi 2*, Aracne 1997.

4.2 Il logaritmo complesso

Poiché, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx} \exp(x) = \exp(x) > 0$ (utilizzando il teorema di derivazione di serie di funzioni), si ha che $x \rightarrow \exp(x)$ è una funzione strettamente crescente a valori in $(0, \infty)$.

Definizione 4

(*) Denotiamo la funzione (reale) inversa di $x \in \mathbb{R} \rightarrow y = \exp(x) \in (0, \infty)$ con $\log_* y$.

(**) Se $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, definiamo $\log w = \{z : \exp(z) = w\}$.

Proposizione 5 Sia $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Esiste un unico $z = x + iy \in \log w$ tale che $y \in [0, 2\pi)$. Inoltre $x = \log_* |w|$.

Dimostrazione Per la parte (1) del Teorema 3 esiste un unico $y \in [0, 2\pi)$ tale che

$$\exp(iy) = \frac{w}{|w|},$$

e per il teorema di addizione (Teorema 1) e la definizione di \log_*

$$\exp(\log_* |w| + iy) = \exp(\log_* |w|) \exp(iy) = |w| \frac{w}{|w|} = w. \quad \blacksquare$$

Definizione 6 La funzione che a $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ associa l'unico $z \in \mathbb{C}$ della Proposizione 5 si denota $\text{Log } w$ e si chiama "parte principale del logaritmo di w ".

Proposizione 7 Se $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ allora $\log w = \text{Log } w + i2\pi\mathbb{Z}$.

La dimostrazione è conseguenza immediata della Proposizione 5 e della parte (3) del Teorema 3. \blacksquare

Proposizione 8 Se w_1 e w_2 sono numeri complessi diversi da zero, allora

$$\log(w_1 w_2) = \log w_1 + \log w_2. \quad (4.4)$$

Si noti che l'uguaglianza in (4.4) è un'uguaglianza tra insiemi.

Dimostrazione Se $z_k \in \log w_k$, allora $\exp(z_k) = w_k$ e, per il teorema di addizione, $\exp(z_1 + z_2) = w_1 w_2$, cioè $z_1 + z_2 \in \log(w_1 w_2)$. Questo dimostra che

$$\log w_1 + \log w_2 \subset \log(w_1 w_2). \quad (4.5)$$

Sia ora $z \in \log(w_1 w_2)$ e si considerino $z_k \in \log w_k$. Si ha allora (per le scelte fatte e per il teorema di addizione)

$$\exp(z) = w_1 w_2 = \exp(z_1 + z_2).$$

Dalla parte (3) del Teorema 3 segue allora che esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che $z - (z_1 + z_2) = 2\pi ik$, ovvero, $z = (z_1 + 2\pi ik) + z_2$. Ma $z_1 + 2\pi ik \in \log w_1$ e, dunque, $z \in \log w_1 + \log w_2$, il che dimostra

$$\log(w_1 w_2) \subset \log w_1 + \log w_2.$$

Tale relazione assieme a (4.5) prova l'asserto. \blacksquare

4.3 Potenze complesse

Definizione 9 Se $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{C}$ definiamo

$$a^b := \exp(b \log a) = \{z = \exp(bw) : w \in \log a\}. \quad (4.6)$$

Osservazione 10 Normalmente, in letteratura, l'esponenziale di un numero complesso $\exp(z)$ si denota, più sinteticamente (ed in vista della relazione 4.3), con e^z .

Esercizio Trovare gli errori:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} &= 2^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2} \log 2\right) = \exp\left(\frac{1}{2}(\log_* 2 + i2\pi\mathbb{Z})\right) = \pm\sqrt{2}; \\ e &= e^1 = e^{-i^2} = e^{-i \cdot i} = (e^{-i})^i = (e^{-i+2\pi i})^i = e^{(-i+2\pi i)i} = e^{1-2\pi} = \frac{e}{e^{2\pi}}. \end{aligned}$$