2 Integrali impropri e calcolo di $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

In questa sezione daremo alcune estensioni del concetto di integrale di una funzione su un intervallo di $\mathbb{R}$. Cominciamo con la seguente

Definizione 1 *Sia $-\infty < x_0 < b \leq \infty$ e sia $f : [x_0, b) \to \mathbb{R}$. Diremo che f è integrabile in senso improprio su $[x_0, b)$ se f è integrabile secondo Riemann su $[x_0, y]$ per ogni $x_0 < y < b$ e se esiste*

$$\lim_{y \to b-} \int_{x_0}^{y} f(x)dx \ ; \tag{2.1}$$

in tal caso si pone

$$\int_{x_0}^{b} f(x)dx = \lim_{y \to b-} \int_{x_0}^{y} f(x)dx \ . \tag{2.2}$$

Un criterio per l'integrabilità impropria è il seguente.

Proposizione 2 *Sia $-\infty < x_0 < b \leq \infty$ e sia $f : [x_0, b) \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann su $[x_0, y]$ per ogni $x_0 < y < b$. Se*

$$\sup_{x_0 < y < b} \int_{x_0}^{y} |f(x)|dx < \infty \ , \tag{2.3}$$

allora $|f|$ e f sono integrabili in senso improprio su $[x_0, \infty)$. Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{y}$ tale che

$$\int_{y_1}^{y_2} |f(x)|dx < \varepsilon \ , \qquad \forall \ \bar{y} < y_1 < y_2 < b \ . \tag{2.4}$$

Dimostrazione Sia $F(y) := \int_{x_0}^{y} |f(x)|dx$ e sia $M := \sup_{x_0<y<b} \int_{x_0}^{y} |f(x)|dx$. Per definizione di estremo superiore, per ogni $x_0 < y < b$, $F(y) \leq M$ e, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{y} < b$ tale che $F(\bar{y}) > M - \varepsilon$. Poiché $F(y) \geq F(\bar{y})$ se $\bar{y} < y < b$ si ha anche che, per tali y, $F(y) > M - \varepsilon$, ovvero

$$-\varepsilon < F(y) - M \leq 0 < \varepsilon \ , \qquad \forall \ \bar{y} < y < b \ ,$$

ovvero

$$M = \lim_{y \to b-} F(y) = \lim_{y \to b-} \int_{x_0}^{y} |f(x)|dx \ . \tag{2.5}$$

Dunque $|f|$ è integrabile in senso improprio su $[x_0, b)$.

Sia, ora, $\{y_j\}$ una qualunque successione in $[x_0, b)$ monotona crescente con limite uguale a b. Chiaramente, anche $F(y_j)$ forma una successione monotona non decrescente con limite uguale ad M. Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché $\{F(y_j)\}$ è una successione di Cauchy (essendo convergente), esiste j_0 tale che

$$0 \leq F(y_i) - F(y_j) \leq \varepsilon \ , \qquad \forall \ i \geq j \geq j_0 \ . \tag{2.6}$$

Poniamo $\bar{y} := y_{j_0}$ e siano y_1 e y_2 tali che $\bar{y} < y_1 < y_2 < b$. Poiché $\lim y_j = b > y_2$, esiste $i > j_0$ tale che $y_i > y_2$. Dunque, da (2.6) segue che:

$$\int_{y_1}^{y_2} |f(x)|dx \leq \int_{\bar{y}}^{y_i} |f(x)|dx = F(y_i) - F(y_{j_0}) < \varepsilon \ ,$$

il che mostra (2.4).

Rimane da verificare che anche f è integrabile in senso improprio su $[x_0, b)$. Sia $\{y_j\}$ una qualunque successione in $[x_0, b)$ convergente a b e si consideri la successione $G(y_j)$ dove $G(y) := \int_{x_0}^{y} f(x)dx$. Tale successione è di Cauchy, poiché

$$|G(y_i) - G(y_j)| = \left|\int_{y_j}^{y_i} f(x)dx\right| \leq \left|\int_{y_j}^{y_i} |f(x)|dx\right| = |F(y_i) - F(y_j)| \ ,$$

e la successione $\{F(y_j)\}$ (essendo convergente) è di Cauchy. Dunque $\{G(y_j)\}$ è convergente, il che (essendo la successione $\{y_j\}$ arbitraria) equivale a dire che f è integrabile in senso improprio. ∎

Osservazione 3 Si osservi che se $f \geq 0$ allora f è integrabile in senso improprio su $[x_0, b)$ se e solo se è ivi integrabile assolutamente in senso impropio.

Si noti anche che se $f \geq 0$ è integrabile su $[x_0, b)$ e g è una funzione integrabile secondo Riemann su $[x_0, y]$ per ogni $y < b$ e $|g| \leq f$, allora g è integrabile assolutamente (in senso improprio) su $[x_0, b)$.

Esempi: (i) ogni funzione integrabile secondo Riemann su $[x_0, b]$, con $b < \infty$, è anche ivi integrabile in senso improprio.

(ii) $1/\sqrt{1-x}$ è integrabile in senso improprio su $[0, 1]$:

$$\lim_{y \to 1-} \int_0^y \frac{1}{\sqrt{1-x}}\, dx = \lim_{y \to 1-} \ 2(1 - \sqrt{1-y}) = 2 \ .$$

(iii) e^{-x^a} è integrabile (assolutamente) in senso improprio su $[0, \infty)$ per ogni $a > 0$. Infatti per ogni $a > 0$, $\lim_{x \to \infty} x^2 e^{-x^a} = 0$. Dunque, esiste $\bar{x}$ tale che $x^2 e^{-x^a} < 1$ per ogni $x \geq \bar{x}$ e

$$\begin{aligned}
\lim_{y \to \infty} \int_0^y e^{-x^a}\, dx &= \int_0^{\bar{x}} e^{-x^a}\, dx + \lim_{y \to \infty} \int_{\bar{x}}^y e^{-x^a}\, dx \\
&\leq \int_0^{\bar{x}} e^{-x^a}\, dx + \lim_{y \to \infty} \int_{\bar{x}}^y \frac{1}{x^2} dx \\
&= \int_0^{\bar{x}} e^{-x^a}\, dx + \frac{1}{\bar{x}} \ .
\end{aligned}$$

(iv) La funzione $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ è integrabile in senso improprio su $[1,\infty)$ ma *non* è ivi integrabile assolutamente:

$$\begin{aligned}\lim_{y\to\infty}\int_1^y \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx &= \lim_{y\to\infty}\Big\{\Big[-\frac{\cos x}{x}\Big]_1^y+\int_1^y\frac{\cos x}{x^2}\,dx\Big\}\\ &= \cos 1+\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx\end{aligned}$$

essendo $\dfrac{\cos x}{x^2}$ integrabile assolutamente su[1] $[1,\infty)$.
D'altra parte (poiché $\operatorname{sen}\pi/2=1$) esiste $0<\delta<1/2$ tale che

$$\operatorname{sen} x\geq \frac{1}{2}\ ,\qquad \forall\ |x-\frac{\pi}{2}|\leq\delta\ ,$$

e, per la periodicità del seno, se poniamo

$$y_k:=2k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\qquad \forall\ k\in\mathbb{Z}\ ,$$

si ha che

$$\operatorname{sen} x\geq \frac{1}{2}\ ,\qquad \forall\ \ |x-y_k|\leq\delta\ . \tag{2.7}$$

Si osservi anche che

$$y_k\leq 3\pi k\ ,\qquad \forall\ k\geq 1\ .$$

Dunque, per ogni $k\geq 1$,

$$\begin{aligned}\int_1^{y_k}\Big|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big|\,dx &\geq \sum_{j=1}^k\int_{y_j-\delta}^{y_j}\Big|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big|\,dx\\ &\geq \sum_{j=1}^k\frac{1}{2}\int_{y_j-\delta}^{y_j}\frac{1}{x}\,dx\\ &\geq \frac{\delta}{2}\sum_{j=1}^k\frac{1}{y_j}\ \geq\ \frac{\delta}{2}\sum_{j=1}^k\frac{1}{3\pi j}\\ &= \frac{\delta}{6\pi}\sum_{j=1}^k\frac{1}{j}\ .\end{aligned}$$

Quindi (essendo la serie armonica $\sum\frac{1}{j}$ divergente)

$$\lim_{k\to\infty}\int_1^{y_k}\Big|\frac{\operatorname{sen} x}{x}\Big|\,dx=\infty\ ,$$

il che mostra che $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ non è integrabile assolutamente su $[1,\infty)$.

Abbiamo visto che e^{-x^2} è integrabile su $[0,\infty)$. E' notevole che tale integrale si possa calcolare esplicitamente.

[1] Si ricordi l'Osservazione 3 e si noti che $\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|\leq\frac{1}{x^2}$ e quest'ultima funzione è integrabile assolutamente su $[1,\infty)$.

Teorema 4

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\ . \tag{2.8}$$

Nel corso della dimostrazione useremo il seguente

Lemma 5 *Per ogni $y \in \mathbb{R}$ si definisca*

$$H(y) := \int_0^1 \frac{e^{y(1+t^2)}}{1+t^2}\ dt\ . \tag{2.9}$$

Allora

$$H'(y) := \int_0^1 e^{y(1+t^2)}\ dt\ . \tag{2.10}$$

Dimostrazione Siano $0 < |h_n| < 1$ tali che $\lim h_n = 0$ e si definisca

$$f_n(t) := \frac{e^{h_n(1+t^2)} - 1}{h_n}\ . \tag{2.11}$$

Per la formula di Taylor in $x = 0$ al secondo ordine (con resto di Lagrange) per[2] e^x, esiste $0 < s < 1$ tale che

$$e^{h_n(1+t^2)} - 1 = h_n(1+t^2) + \frac{e^{s\ h_n(1+t^2)}}{2}\left(h_n(1+t^2)\right)^2\ .$$

Dunque, per ogni $t \in [0,1]$,

$$|f_n(t) - (1+t^2)| = \frac{e^{s\ h_n(1+t^2)}}{2}\left|h_n(1+t^2)^2\right| \le |h_n|\ 2e^2\ ,$$

il che mostra che f_n converge uniformemente a $(1+t^2)$ su $[0,1]$. Da questo segue immediatamente che $\frac{e^{y(1+t^2)}}{1+t^2} f_n(t)$ converge a $e^{y(1+t^2)}$ uniformemente su[3] $[0,1]$. Quindi, per la Proposizione 5 della sezione §1, si ha che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(y+h_n) - H(y)}{h_n} = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{e^{y(1+t^2)}}{1+t^2} f_n(t)\ dt = \int_0^1 e^{y(1+t^2)}\ dt\ .$$

Dall'arbitrarietà della successione $\{h_n\}$ segue la tesi. ∎

Dimostrazione (del Teorema 4) Si definisca

$$F(x) := \int_0^x e^{-\xi^2}\ d\xi\ , \qquad G(x) := \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\ dt\ . \tag{2.12}$$

[2]Cioè: $\forall\ x\ \exists\ 0 < s < 1$ tale che $e^x = 1 + x + \frac{e^{sx}}{2}\ x^2$.

[3]*Se g è una funzione continua su $[a,b]$ e $f_n \to f$ uniformemente su $[a,b]$, allora $gf_n \to gf$ uniformemente su $[a,b]$*; si veda anche il punto (ii) del Lemma 3.3 del §3.

Dunque $G(x) = H(-x^2)$ e, per il Lemma,

$$\begin{aligned} G'(x) &= -2xH'(-x^2) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\ dt \\ &= -2e^{-x^2}\int_0^1 e^{-(xt)^2}\ d(xt) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-\xi^2}\ d\xi \\ &= -2e^{-x^2}F(x) = -2F'(x)F(x) = -(F^2)'(x)\ . \end{aligned}$$

Tale relazione è equivalente a $(F^2+G)' = 0$ e quindi F^2+G è una funzione costante. Dunque

$$F^2(x) + G(x) = F(0)^2 + G(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\ dt = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}\ . \tag{2.13}$$

Si osservi che[4]

$$0 \le G(x) \le e^{-x^2}\ ,$$

dunque, prendendo il limite per $x \to \infty$ in (2.13) si ottiene

$$\Big(\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx\Big)^2 = \frac{\pi}{4}\ ,$$

ovvero la tesi. ∎

Naturalmente è possibile adattare, nalla maniera ovvia, la definizione 1 al caso in cui il dominio di integrazione sia della forma $(a, x_0]$ con $-\infty \le a < x_0 < \infty$:

Definizione 6 *Sia $-\infty \le a < x_0 < \infty$ e sia $f : (a, x_0] \to \mathbb{R}$. Diremo che f è integrabile in senso improprio su $(a, x_0]$ se f è integrabile secondo Riemann su $[y, x_0]$ per ogni $a < y < x_0$ e se esiste*

$$\lim_{y\to a+}\int_y^{x_0} f(x)dx\ ; \tag{2.14}$$

in tal caso si pone

$$\int_a^{x_0} f(x)dx = \lim_{y\to a+}\int_y^{x_0} f(x)dx\ . \tag{2.15}$$

L'analogo della Proposizione 2 diventerà in tal caso

Proposizione 7 *Sia $-\infty \le a < x_0 < \infty$ e sia $f : (a, x_0] \to \mathbb{R}$ integrabile secondo Riemann su $[y, x_0]$ per ogni $a < y < x_0$. Se*

$$\sup_{a<y<x_0}\int_y^{x_0} |f(x)|dx < \infty\ , \tag{2.16}$$

allora $|f|$ e f sono integrabili in senso improprio su $(a, x_0]$. Inoltre, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{y}$ tale che

$$\int_{y_1}^{y_2} |f(x)|dx < \varepsilon\ , \qquad \forall\ a < y_1 < y_2 < \bar{y}\ . \tag{2.17}$$

[4]L'integrando, nella definizione di G è positivo e maggiorato da e^{-x^2}.

Gli ovvi mutamenti alla dimostrazione della Proposizione 2 vengono lasciati come semplice esercizio.

Infine, si dirà che f è integrabile (assolutamente) in senso improprio sull'intervallo (a, b) con $-\infty \leq a < b \leq \infty$ se f è integrabile (assolutamente) in senso improprio su $(a, x_0]$ e su $[x_0, b)$ per un punto $x_0 \in (a, b)$. Se f è integrabile in senso improprio su (a, b) si porrà

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx \ . \tag{2.18}$$

Chiaramente tali definizioni non dipendono dalla scelta di x_0 in (a, b).

Ad esempio e^{-x^2} è integrabile su $(-\infty, \infty)$ e si ha

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \ dx = \sqrt{\pi} \ . \tag{2.19}$$