# Soluzioni III

15/10/2002

Integrali impropri, Successioni di funzioni

**Esercizio 1.** Consideriamo $\int_0^r f(x)\sin x\,dx$. Possiamo integrare questa funzione per parti con $u = f$ e $dv = \sin x\,dx$ e ottenere $\int_0^r f(x)\sin x\,dx = f(0) - f(r)\cos r + \int_0^r f'(x)\cos x\,dx$. Ora $\lim_{r\to\infty} f(r)\cos r = 0$ e $\lim_{r\to\infty} |\int_0^r f'(x)\cos x\,dx| \leq \lim_{r\to\infty}\int_0^r |f'(x)|\,dx = \lim_{r\to\infty} f(r) - f(0) = -f(0) < \infty$.
Allora $\int_0^\infty f(x)\sin x\,dx < \infty$.

**Esercizio 2.** (1) Possiamo fare il cambio di variabile $y = -x$ ottendo così $\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{|x|}}{|x|-\sin x}\,dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{y}}{y+\sin y}\,dy = \int_0^\epsilon \frac{\sqrt{y}}{y+\sin y}\,dy + \int_\epsilon^1 \frac{\sqrt{y}}{y+\sin y}\,dy$. Ora il secondo integrale non è improprio quindi non da problemi. Mentre per quanto riguarda il primo possiamo applicare lo sviluppo di McLaurin a $\sin y$ se $\epsilon$ è molto vcino a zero. Ottenendo così $\int_0^\epsilon \frac{\sqrt{y}}{y+\sin y}\,dy \approx \frac{1}{2}\int_0^\epsilon y^{-1/2}\,dy = \sqrt{y}|_0^\epsilon = \sqrt{\epsilon} < \infty$.

(2) Osserviamo che $x^2+1$ è crescente se $x > 0$ allora $\frac{1}{x^2+1}$ è decrescente in$[0,\infty)$ e in più $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1} = 0$ e quindi l'integrale converge per quanto visto nell' Esercizio 1.

(3) Consideriamo $\int_1^r(\arctan x - \pi + \frac{1}{x})\,dx = r\arctan r - 1/2\log(1+r^2) - \frac{\pi}{2}r + \log r - \arctan 1 + \frac{\pi}{2} = 1/4\pi + r(\arctan r - \frac{\pi}{2}) + \log(\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}) \to_{r\to\infty} 1/4\pi - 1$. (Abbiamo usato: $\int \arctan t\,dt = t\arctan t - 1/2\log(1+t^2) + c$ e $\lim_{r\to\infty} r(\arctan r - \frac{\pi}{2}) = -1$ per L'Hopital).

(4) Osserviamo che $x^{\log x} = e^{\log^2 x}$.
Ora se $0 < x < e^{-1}$ abbiamo che $e^{\log^2 x} > \frac{1}{x}$. Infatti $e^{\log^2 x} > \frac{1}{x} \Leftrightarrow \log^2 x > -\log x \Leftrightarrow \log x < -1 \Leftrightarrow 0 < x < e^{-1}$. Allora $\int_0^1 x^{\log x}\,dx = \int_0^{1/e} x^{\log x}\,dx + \int_{1/e}^1 x^{\log x}\,dx > \int_0^{1/e}\frac{1}{x}\,dx + \int_{1/e}^1 x^{\log x}\,dx = \infty$. E quindi qusto integrale diverge.

(5)Poniamo $\beta \neq 0$ altrimenti l'integrale non converge. Osserviamo che integrando due volte per parti possiamo ottenere

$$\int e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx = \frac{\beta e^{-\beta x}}{\alpha^2+\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\sin\alpha x - \cos\alpha x\right).$$

Quindi $\lim_{r\to\infty}\int_0^r e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx = \lim_{r\to\infty}\frac{\beta e^{-\beta r}}{\alpha^2+\beta^2}(\frac{\alpha}{\beta}\sin\alpha r - \cos\alpha r) + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$. Notiamo anche che se $\beta \neq 0 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2 > 0$

**Esercizio 3.** (1) Pongo $f_n(x) = \frac{1+x^n}{n+x^{2n}}$.
Se $|x| > 1$ allora si ha $f_n(x) = \frac{x^n}{x^{2n}} \frac{\frac{1}{x^n}+1}{\frac{n}{x^{2n}}+1} = \frac{1}{x^n} \frac{\frac{1}{x^n}+1}{\frac{n}{x^{2n}}+1} \to_n 0$. Se $x = 1$ abbiamo $f_n(x) = \frac{2}{n+1} \to_n 0$. Se $x = -1$ abbiamo $0 \leqslant f_n(-1) \leqslant \frac{2}{n+1}$ e quindi $f_n(-1) \to_n 0$. Ora se $|x| < 1$ abbiamo che $|f_n(x)| \leqslant \frac{2}{n}$ e quindi converge a 0. Dale considerazioni fatte possiamo dedurre che per $|x| \leqslant 1$ $f_n(x) \leqslant \frac{2}{n} \to_n 0$ uniformemente. Grazie allo studio della derivata prima di $f_n(x)$ possiamo affermare che la funzione ammette massimo in $x_n^* = \sqrt[n]{-1+\sqrt{n+1}} \to_n 1^+$ per $x > 0$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[1,\infty)} |f_n(x)| = \lim_{n\to\infty} f_n(x_n^*) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2(n+1-\sqrt{n+1})} \to 0,$$

da cui si deduce che $f_n(x)$ converge uniformemente in $[1,\infty)$. Per quanto riguarda la convergenza uniforme in $\mathbb{R}$ della funzione, ci basta studiare la sua convergenza uniforme in $(-\infty,-1]$. Osserviamo che in esso $f_n(x) < 0$ se $n$ è dispari, oppure $f_n(x) > 0$ se $n$ pari. Nel caso $n$ pari allora la funzione è crescente e quindi ammnette massimo in $x_n^* = -1$ e quindi $|f_n(x)| \leqslant \frac{2}{n+1}$. Nel caso $n$ dispari la funzione $|f_n(x)|$ ammette massimo in $x_n^* = \sqrt[n]{-1-\sqrt{n+1}}$ e quindi va a 0 come $\frac{1}{n}$. In entrambi i casi la funzione tende a 0 uniformemente.

(2) Pongo $f_n(x) = \frac{1+x^{2n}}{n+x^{2n}}$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } |x| \leqslant 1; \\ 1 & \text{if } |x| > 1; \end{cases}$$

Per quanto riguarda la convergenza uniforme in $[-1,1]$ possiamo affermare che

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{[-1,1]} |f_n(x) - f(x)| \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

e quindi converge uniformemente. La funzione $f_n(x)$ non può convergere uniformemente su tutto $\mathbb{R}$ perchè il suo limite puntuale $f(x)$ non è continuo per $|x| = 1$.

(3) Pongo $f_n(x) = n^{n^x} = e^{n^x \log n}$.
Osserviamo che la funzione $f_n(x)$ e crescente in $x$ e che $f_n(x) > 1 \forall x$. Ora se $x \geqslant 0$ si ha $f_n(x) \geqslant n \to_n \infty$. Mentre se $x < 0$ poniamo$y = -x > 0$ e quindi possiamo scrivere $f_n(y) = e^{\frac{\log n}{n^y}} \to 1^+$. Si ha quindi convergenza puntuale in $E = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\}$ e $\lim_n f_n(x) = 1$. Studiamo la convergenza uniforme in $E$.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_E |f_n(x) - f| = \lim_{n\to\infty} \sup_E (n^{n^x} - 1) = \lim_{n\to\infty} n - 1 = \infty.$$

Non essendoci convergenza uniforme in $E$ proviamo a restringerci all'insieme $(-\infty, -1]$.

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{(-\infty,-1]} |f_n(x) - f| = \lim_{n\to\infty} (\sqrt[n]{n} - 1) = 0.$$

Riassumendo la funzione $f_n(x)$ converge uniformemente a 1 solo nell'insieme $(-\infty, -1]$.