Prova scritta di AM2 dell'8/1/2003 – (II Esonero)

- **Per ottenere la sufficienza è necessario (ma non sufficiente) svolgere correttamente l'esercizio 1 ed almeno uno tra gli esercizi 2 e 3.**
- **Motivare il lavoro svolto.**
- **Durante l'esame non è consentito l'uso di appunti, libri, calcolatrici.**

1) Dare la definizione di differenziabilità per funzioni su $\mathbb{R}^2$ illustrandola con esempi e controesempi.

2) Dare un esempio di sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ connesso ma non connesso per curve (si assuma la conoscenza della "curva del topologo" in $\mathbb{R}^2$).

3) Dimostrare (almeno in grandi linee) che $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4) sia

$$f(x,y) = \max\left\{\frac{x^2+y^4}{1+x^2},\ \operatorname{sen}\sqrt{|xy|}\right\}\ .$$

(i) Dato $\varepsilon > 0$ si trovi δ tale che $|f(x,y)| < \varepsilon$ qualora $|(x,y)| < \delta$.
(ii) Discutere la continuità di f su $\mathbb{R}^2$.

5) Sia $f(x,y) = -y + \operatorname{senh}(x^2+y)$.

(i) Trovare gli estremi superiore ed inferiore di f su $\mathbb{R}^2$;

(ii) studiare i punti stazionari di f.

(iii) Dimostrare direttamente (cioè usando la definizione di differenziabilità) che f è differenziabile nell'origine.

6) Determinare tutti i valori complessi di:

$$\text{(a)}\quad \log(1+2i)\ ,\qquad \text{(b)}\quad (-1)^{\sqrt{2}}\ ,\qquad \text{(c)}\quad i^{2i}\ .$$