AM1b, a.a. 2002-2003 - Esercizi Extra (Soluzioni)

Silvia Mataloni, Giampiero Palatucci

14 aprile 2003

1. Calcolare il limite delle seguenti successioni.

a. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)e^n}{2^n+(n+1)!} = 0.$

Occorre sfruttare il limite notevole $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$

Si ha:

$$\frac{(n+1)e^n}{2^n+(n+1)!} = \frac{(n+1)e^n}{(n+1)!\left(\frac{2^n}{(n+1)!}+1\right)} = \frac{e^n}{n!} \cdot \frac{1}{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{2^n}{n!}+1} \to 0\cdot 1 = 0.$$

b. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right)}{n(1-\cos\frac{1}{n^2})} = 2.$

Scriviamo la successione in una forma più comoda per usare i limiti noti:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{\arctan\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right)}{n(1-\cos\frac{1}{n^2})} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\cdot\frac{\frac{1}{n^4}}{1-\cos\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{\arctan\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\frac{1}{n^4}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^4}}{1-\cos\frac{1}{n^2}}\cdot\frac{\arctan\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right)}\cdot\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)\right)}{\frac{1}{n^3}} \\
&= 2\cdot 1\cdot 1 = 2.
\end{aligned}$$

2. Dire per quali $x > 0$ convergono le seguenti serie numeriche:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\sqrt{n^x+1}-\sqrt{n^x})$ converge se $x > 2$.

Si ha:

$$(\sqrt{n^x+1}-\sqrt{n^x})\cdot\frac{(\sqrt{n^x+1}+\sqrt{n^x})}{(\sqrt{n^x+1}+\sqrt{n^x})}=\frac{1}{(\sqrt{n^x+1}+\sqrt{n^x})}.$$

Possiamo studiare la serie con il *Criterio degli Infinitesimi*, confrontando con la serie armonica generalizzata di potenza $\frac{x}{2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{(\sqrt{n^x+1}+\sqrt{n^x})}=\frac{1}{2}.$$

Quindi la serie converge se e solo se $\dfrac{x}{2} > 1 \Leftrightarrow x > 2$.

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(1+nx)}{nx^{n+1}}$ converge se $x > 1$.

La convergenza della serie per $x > 1$ segue facilmente dal *Criterio della Radice*.

Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{\ln(1+nx)}{nx^{n+1}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{\ln(1+nx)}}{\sqrt[n]{nx}}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$$

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(2n)!x^n}{(n!)^2}$ converge se $x < \frac{1}{4}$.

La presenza del fattoriale "consiglia" l'uso del *Criterio del Rapporto*.

Poiché $(2n+2)! = (2n)!(2n+1)(2n+2)$, si ha:

$$\frac{\dfrac{(2(n+1))!x^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\dfrac{(2n)!x^n}{(n!)^2}}=\frac{(2n)!(2n+1)(2n+2)x^{n+1}(n!)^2}{(n+1)^2(n!)^2x^n(2n)!}=\frac{(2n+1)(2n+2)x}{(n+1)^2}\longrightarrow 4x.$$

Quindi la serie converge se $4x < 1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{4}$.

Il Criterio non dà informazioni se il limite di $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ è 1, i.e. se $x = \dfrac{1}{4}$.

In questo caso, la serie per $x = \dfrac{1}{4}$ è $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$, che diverge.

Per verificarlo, utilizzaziamo il *Criterio di Raabe*([1]).

Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} n \left(\frac{\dfrac{(2n)!x^n}{(n!)^2}}{\dfrac{(2(n+1))!x^{n+1}}{((n+1)!)^2}} - 1 \right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+2n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{2} < 1,$$

da cui la divergenza.

[1]**Criterio di Raabe**. Sia $\{a_n\}$ una successione positiva tale che il limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) =: L$ esista (finito o meno) e sia diverso da 1. Allora se $L > 1$ la serie $\sum a_n$ converge, altrimenti diverge.