AM1b, a.a. 2002-2003 - Esercizi 5 [Soluzioni]

Silvia Mataloni, Giampiero Palatucci

7 aprile 2003

1. Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{3n+1}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n+e^n}.$$

Per tutte queste serie numeriche, è sufficiente utilizzare il *Criterio di Leibniz* per verificarne la convergenza.

Vediamo in dettaglio la convergenza per la seconda serie.
Per applicare il Criterio di Leibniz occorre che la successione $\frac{\ln n}{n}$ sia non negativa, infinitesima e nondecrescente (definitivamente).
Chiaramente, $\frac{\ln n}{n} \geq 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\frac{\ln n}{n} \to 0$ per $n \to +\infty$; rimane da verificare la monotonia.
Si ha:

$$\frac{\ln n}{n} \geq \frac{\ln n+1}{n+1} \ \Leftrightarrow\ \ln n^{(n+1)} \geq \ln(n+1)^n.$$

Per la monotonia del logaritmo, è sufficiente verificare che $n^{(n+1)} \geq (n+1)^n$, i.e. $n \geq \frac{(n+1)^n}{n^n}$.
Poiché $\frac{(n+1)^n}{n^n} \equiv \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e$ per $n \to +\infty$, la successione risulta non decrescente per $n \geq 3$.

Per quanto riguarda l'ultima serie, per applicare il Criterio di Leibniz occorre osservare che $\cos(n\pi) = (-1)^n$.

2. Dire per quali $x \in \mathbb{R}$ convergono le seguenti serie numeriche:

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{1+x^{2n}}$ converge per $|x| \neq 1$.

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{2n+1}$ converge per $|x| < 1$.

c. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n n^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$ converge $\begin{cases} \text{per } |x| < 1, \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{R}, \\ \text{per } x = |1|, \text{ se } \alpha < -1, \\ \text{(semplicemente) per } x = -1, \text{ se } \alpha = -1. \end{cases}$

Per $x = 0$ la serie converge, banalmente.
Per $x \neq 0$, usiamo il *Criterio della Radice*:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|x^n n^\alpha|} = \lim_{n\to+\infty} |x| \sqrt[n]{n^\alpha} = |x|,$$

quindi la serie converge assolutamente se $|x| < 1$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$.
Se $x = 1$, la serie data si riduce alla serie armonica con esponente α. Da cui, la serie converge assolutamente se e solo se $\alpha < -1$.
Se $x = -1$, la serie data diventa $\sum(-1)^n n^\alpha$, che converge assolutamente se $\alpha < -1$ (come serie armonica) e converge semplicemente per $\alpha = -1$ (segue dal Criterio di Leibniz).

d. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ converge $\begin{cases} \text{per } |x| < 1, \\ \text{(semplicemente) per } x = 1. \end{cases}$

e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2x+3)^n}{n}$ converge $\begin{cases} \text{per } x \in (-2, -1), \\ \text{(semplicemente) per } x = -1. \end{cases}$

f. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{1+nx^2}$ converge $\begin{cases} \text{per } |x| < 1, \\ \text{(semplicemente) per } x = -1. \end{cases}$

g. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n x^n}{n^2+1}$ converge per $|x| \leq \frac{1}{2}$.

Conviene sfruttare il Criterio della Radice:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{2^n|x|^n}{n^2+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2|x|}{n^2+1} = 2|x|,$$

quindi la serie converge assolutamente se $|x| < \frac{1}{2}$.
Per $|x| = \frac{1}{2}$, si ha:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{2^n x^n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1},$$

che converge; si può verificare ad esempio col *Criterio degli Infinitesimi*, confrontando con la serie armonica $\sum \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 \cdot \frac{1}{n^2+1} = 1.$$

Infine, la serie non converge se $|x| < \frac{1}{2}$, in quanto la successione $\left|\frac{2^n x^n}{n^2+1}\right|$ non è infinitesima.

h. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! x^n}{n^n}$ converge per $|x| < e$.

Subito, per $x = 0$ si ha la convergenza. Per $x \neq 0$, usiamo il *Criterio del Rapporto*.

Poniamo $|a_n| := \dfrac{n!|x|^n}{n^n}$.

Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x| n^n}{(n+1)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|x|}{e}.$$

Segue che la serie converge assolutamente per $|x| < e$.

Per $|x| \geq e$, la serie non può convergere perché $|a_n|$ è non decrescente; infatti:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{|x|}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \geq \frac{e}{e} \equiv 1 \ \Leftrightarrow \ |a_{n+1}| \geq |a_n|.$$

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!}$ converge per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Verifichiamo la convergenza per $x \neq 0$ con il Criterio del Rapporto.

Si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+2)|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(n+1)|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|x|(n+2)}{(n+1)^2} = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dunque la serie converge assolutamente per ogni $x \in \mathbb{R}$.