3. SOLUZIONI DEGLI ESERCIZI SUL PRINCIPIO DI INDUZIONE

Esercizio 1

(a) $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$

P_1 é vera, infatti per $n = 1$, $2^0 + 2^1 = 3 = 2^{1+1} - 1$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1}:

$$(2^0 + 2^1 + ...2^n) + 2^{n+1} = (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1.$$

Abbiamo ottenuto P_{n+1}.

(b) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Verifichiamo $P_1 : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1}:

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Abbiamo ottenuto P_{n+1}.

(c) se $a \geq -1$, $(1+a)^n \geq 1 + na$

Verifichiamo $P_1 : 1 + a = 1 + a$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1}:

$$(1+a)^{n+1} = (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a) = 1+a+na+na^2 = 1+a(n+1)+na^2 \geq 1+a(n+1).$$

L' ultima disuguaglianza deriva dal fatto che $na^2 \geq 0$. Abbiamo ottenuto P_{n+1}.

$(d) n! \geq 2^{n-1}$

Verifichiamo $P_1 : 1 \geq 1$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1}:

$$(n+1)! = n!(n+1) \geq 2^{n-1}(n+1) \geq 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n.$$

Abbiamo ottenuto P_{n+1}.

(e) se $a \neq 1, \sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Verifichiamo $P_1 : \sum_{k=0}^{1} a^k = a^0 + a^1 = 1 + a$. Supponiamo vera P_n e dimostriamo P_{n+1}:

$$\sum_{k=0}^{n+1} = a^0 + a^1 + ... + a^n + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+1}}{1-a} + a^{n+1} = \frac{1-a^{n+2}}{1-a}.$$

Abbiamo ottenuto P_{n+1}.

Esercizio 2

Riscriviamo la disuguaglianza come $x^{\frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{x-1}{n}$, ovvero $x \leq \left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n$. Grazie alla disuguaglianza di Bernoulli si ha:

$$\left(1 + \frac{x-1}{n}\right)^n \geq 1 + n\frac{x-1}{n} = x.$$

Esercizio 3

Ovviamente un numero pari si scrive come multiplo intero di 2, quindi la nostra tesi é dimostrare che $n + n^2 = 2k,\ k \in \mathbb{N}$. Verifichiamo $P_1 : 1 + 1 = 2$ é un numero pari. Suppongo vera P_n, cioé che $n + n^2$ sia pari e dimostro P_{n+1}.

$$(n+1) + (n+1)^2 = n + 1 + n^2 + 2n + 1 = (n + n^2) + 2n + 2$$

poiché per ipotesi $n + n^2$ é pari, il numero $(n + n^2) + 2n + 2$ é anch' esso pari, e la tesi é dimostrata.