Primo esonero di AM1a - ANALISI MATEMATICA
8/11/2002

ESERCIZIO 1

Dimostrare che:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

Si usa il principio di induzione. Base dell'induzione: $P_1 : \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$.
Passo di induzione: verifico che P_n implica P_{n+1}:

$$P_{n+1} : \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{n+1}} = \text{ (per } P_n\text{) } 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

quindi

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

$\square$

ESERCIZIO 2

Dato l'insieme

$$A = \left\{ x = \frac{(-1)^n}{n} + 2(-1)^{n+1},\ n \in \mathbf{N} \right\}$$

trovare gli eventuali punti di accumulazione.
Provare che $x = 2 - \frac{1}{11}$ é un punto isolato.
Riscrivo l'insieme come

$$\left\{ x = \frac{1}{2k} - 2,\ k \in \mathbf{N} \right\} \cup \left\{ x = \frac{-1}{2k-1} + 2,\ k \in \mathbf{N} \right\} = A_{2k} \cup A_{2k-1}$$

e trovo i punti di accumulazione dei due insiemi. Poiché i due sottoinsiemi hanno la medesima struttura, proveremo che 2 é l'unico punto di accumulazione di A_{2k-1} e seguendo lo stesso metodo si potrá dimostrare che -2 é l'unico punto di accumulazione di A_{2k}, quindi l'insieme A ammetterá -2, 2 come suoi unici punti di accumulazione. Dimostriamo che 2 é di accumulazione:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists I(2, \varepsilon) \text{ e } x_{2\overline{k}-1} \in A_{2k-1} \cap I(2, \varepsilon),\ x_{2\overline{k}-1} \neq 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2 - \frac{1}{2k-1} - 2| = |\frac{1}{2k-1}| < \varepsilon \Leftrightarrow k > \left(\frac{1}{\varepsilon} + 1 \right) \frac{1}{2}.$$

Per provare che $x = 2 - \frac{1}{11}$ é un punto isolato osserviamo che nell'intorno $\left(2 - \frac{1}{9}, 2 - \frac{1}{13}\right)$ non ci sono altri punti dell'insieme al di fuori di $x = 2 - \frac{1}{11}$. $\square$

ESERCIZIO 3

Dato l'insieme:

$$B = \left\{ x = \frac{1}{n^\alpha},\ n \in \mathbf{N},\ \alpha \in (\mathbf{1}, +\infty) \right\}$$

calcolare estremo superiore ed inferiore.
Cosa cambia se $0 < \alpha < 1$?
Osserviamo che $\frac{1}{n^\alpha} > 0\ \forall \alpha \in (1, +\infty),\ n \geq 1$. Quindi 0 é un minorante. Inoltre é il piú grande dei minoranti, cioé é l'inf dell'insieme, infatti

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists x_{\overline{n}} \in B :\ 0 + \varepsilon > \frac{1}{\overline{n}^\alpha}$$

basta prendere $\overline{n} > \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}}}$.
Riguardo all'estremo superiore, osserviamo che $\frac{1}{n^\alpha} \leq 1$, $\frac{1}{n^\alpha} = 1$ per $n = 1$, quindi 1 é il massimo dell'insieme. Poiché non abbiamo fatto alcuna ipotesi sul parametro α, gli estremi dell'insieme non variamo se $\alpha \in (0, 1)$. $\square$

ESERCIZIO 4

Usando la definizione di limite di successione dimostrare che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 - 6n + 1}{n^2 + 3} - 2 = 0$$

Si deve provare che $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists \overline{n}$: $|\frac{2n^2-6n+1}{n^2+3} - 2| < \varepsilon$ ovvero:

$$|\frac{2n^2 - 6n + 1}{n^2 + 3} - 2| = 2 - \frac{2n^2 - 6n + 1}{n^2 + 3} = \frac{6n + 5}{n^2 + 3} < \frac{6n + 5n}{n^2} = \frac{11n}{n^2} =$$

$$= \frac{11}{n} < \varepsilon \iff n > \frac{11}{\varepsilon}$$

$\square$

ESERCIZIO 5

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n - 1}{b^n + 3}$$

dove $1 < a < b$.
Osserviamo che $\lim_{n\to\infty} \alpha^n = +\infty$ se $\alpha > 1$ e 0 se $\alpha < 1$. Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n - 1}{b^n + 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^n - \frac{1}{b^n}}{1 + \frac{3}{b^n}} = \frac{0 - 0}{1 - 0} = 0$$

$\square$