SECONDO ESONERO DI AM1a
9 gennaio 2003

Esercizio 1.
Trovare massimo e minimo limite della seguente successione:

$$a_n = (-1)^n + (-1)^{n+1} \sin \frac{1}{n}$$

Giustificare le risposte.
Osserviamo subito che $-1, 1$ sono rispettivamente un minorante e un maggiorante, infatti:

$$-1 < -1 + \sin \frac{1}{n} \leq a_n \leq 1 - \sin \frac{1}{n} < 1$$

Inoltre $a_{2k} \to 1$ e $a_{2k-1} \to -1$, quindi avendo trovato un maggiorante e un minorante e due sottosuccessioni che tendono a questi due valori, abbiamo trovato massimo e minimo limite.
Enunciare la caratterizzazione di massimo e minimo limite:
$L = \max\lim$ di a_n se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overline{n} \ : \forall n > \overline{n} \ a_n < L + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ per infiniti indici } a_n > L - \varepsilon$$

$L = \min\lim$ di a_n se e solo se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \overline{n} \ : \forall n > \overline{n} \ a_n > L - \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ per infiniti indici } a_n < L + \varepsilon$$

Esercizio 2.
Determinare per quali $x \in \mathbb{R}$ la seguente serie converge

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{\frac{x}{2}+kx^3}$$

Riscrivo la serie:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} e^{\frac{x}{2}+kx^3} = e^{\frac{x}{2}} \sum_{k=1}^{+\infty} e^{kx^3}$$

applichiamo il criterio della radice (la serie é a termini positivi):

$$\sqrt[k]{e^{kx^3}} = e^{x^3} < 1 \iff x < 0$$

$\sqcap\!\!\!\sqcup$

Enunciare due criteri di convergenza per serie a termini positivi.
Ad esempio criterio del rapporto e della radice:
Una serie a termini positivi $\sum a_n$ converge se $\max\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, invece se $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ la serie diverge.
Una serie a termini positivi $\sum a_n$ converge se $\max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, se invece $\max\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$ la serie diverge.

Esercizio 3.
Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{\sin(x+\pi)}}.$$

Si ha che $\sin(x+\pi) = -\sin x$ quindi il limite diventa:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{-\frac{1}{\sin(x)}} = \lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]^{-\frac{x}{\sin x}} \to \ e^{-1}$$

$\sqcap\!\!\!\sqcup$

Esercizio 4.
Dimostrare che la funzione

$$f(x) = \sin(e^{\sin x})$$

é uniformemente continua su $\mathbb{R}$.
La funzione é derivabile, la sua derivata

$$f'(x) = \cos(e^{\sin x})e^{\sin x}\cos x$$

é limitata su tutto $\mathbf{R}$, quindi f é lipschitziana su $\mathbf{R}$ e quindi é anche u.c..
Dare la definizione di funzione continua e di funzione uniformemente continua, evidenziando la differenza che esiste tra le due definizioni.
$f:\ A \to \mathbf{R}$ si dice continua in x_0 se

$$\forall \varepsilon > 0\, \forall\, x_0 \in A, \exists \delta(\varepsilon, x_0) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\ \ \forall\, x:\ |x - x_0| < \delta(\varepsilon, x_0)$$

la funzione si dirá continua in A se é continua $\forall\ x_0 \in A$.
$f:\ A \to \mathbf{R}$ si dice uniformemente continua in A se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) : \forall\ x, x_0 : |x - x_0| < \delta(\varepsilon),\ |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

La differenza fondamentale sta nel fatto che per le funzioni u.c. il δ puó essere scelto indipendentemente dal punto x_0, quindi si trova un δ che va bene per tutti i punti del dominio, la continuitá semplice invece é una proprietá piú debole perché il δ dipende anche dal punto x_0.

Esercizio 5.
Data la funzione

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$$

determinare: insieme di definizione, limiti per $x \to \pm\infty$, limiti per $x \to x_0$ se x_0 appartiene allaa frontiera dell'insieme di definizione di f, massimi e minimi relativi. Tracciarne un grafico qualitativo.

$$I_E(f) = (-\infty, -3) \cup [0, +\infty)$$

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}=+\infty$$
$$\lim_{x\to-3^-}\sqrt{\frac{x^3}{x+3}}=+\infty$$

Derivata:

$$f'(x)=\frac{1}{2}\frac{2x^3+9x^2}{(x+3)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x^3}}=0\ \Leftrightarrow\ x=-\frac{9}{2}$$

$-\frac{9}{2}$ é un minimo relativo; la derivata apparentemente ha una singolaritá in zero, ma facendo il limite si ha $f'(0)=0$, quindi zero é un punto a tangente orizzontale. Dare la definizione di massimo relativo ed assoluto: x_0 si dice punto di massimo relativo per f se $\exists\ I(x_0,r)$: $\forall x\in I(x_0,r),\ f(x)\leq f(x_0)$, mentre x_0 si dice punto di massimo assoluto per f se $f(x)\leq f(x_0)\forall x\in\mathcal{D}(f)$ ($\mathcal{D}(f)$ = dominio di f.)