Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003
AL 1
Esercizi per casa, IV prova (16 dicembre 2002)

1. Dimostrare che l'insieme $\mathbb{Q}^+$ dei numeri razionali positivi con l'operazione $\star$, definita da $a \star b = \frac{ab}{5}$ è un gruppo.

2. Sia n un intero positivo fissato.

(a) Dimostrare che l'insieme $C_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ è un gruppo abeliano rispetto al prodotto tra numeri complessi.

(b) Sia $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \to (C_n, \cdot)$ l'applicazione tale che $\varphi(k) = \cos(\frac{2k\pi}{n}) + i\sin(\frac{2k\pi}{n})$. Dimostrare che φ è un omomorfismo di gruppi, applicare il teorema fondamentale di omomorfismo e dedurre che C_n è ciclico e finito.

3. Sia $(U(\mathbb{Z}/\equiv_n), \cdot)$ il gruppo degli elementi invertibili di $\mathbb{Z}/\equiv_n$. Determinare quali fra i seguenti gruppi sono isomorfi: $(U(\mathbb{Z}/\equiv_5), \cdot)$, $(U(\mathbb{Z}/\equiv_8), \cdot)$, $(U(\mathbb{Z}/\equiv_9), \cdot)$, $(U(\mathbb{Z}/\equiv_{10}), \cdot)$.

4. Siano $\sigma, \tau \in S_7$, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & 4 & 6 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 4 & 3 & 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

(a) Determinare σ^{-1} e τ^{-1}.

(b) Scrivere σ e τ come prodotto di cicli disgiunti.

(c) Determinare l'ordine di σ e di τ.

(d) Determinare la parità di σ e di τ.

(e) Calcolare $\sigma\tau$ e $\tau\sigma$.

5. Sia $A = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, 3 \nmid n\}$. Dimostrare che A è un sottoanello di $\mathbb{Q}$. Verificare che A non è un campo.

6. Sia $M_{2,2}(\mathbb{R})$ l'anello delle matrici 2×2 ad elementi reali. Mostrare che l'applicazione $\psi : \mathbb{C} \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, definita da $\psi(a + ib) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ è un omomorfismo iniettivo di anelli.

7. Determinare quali dei seguenti polinomi sono irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$:

(a) $X^2 + X + 1$

(b) $X^4 + 4X^2 + 3$

(c) $X^{57} + 49X^{23} + 21X^{17} + 77X^6 + 399$

8. Scomporre il polinomio $X^4 - 4$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[X]$, $\mathbb{Q}[X]$, $\mathbb{R}[X]$, $\mathbb{C}[X]$.

9. Dimostrare che $X^2 + X + 1$ è l'unico polinomio irriducibile di grado 2 su $\mathbb{Z}/\equiv_2$.

10. Dimostrare che l'insieme $\mathbb{Z}[X]$ è numerabile.