Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003

ALGEBRA 1
Prof. M. Fontana
Tutorato 9 - Andrea Cova (4 dicembre 2002)

1. Se $x \in R$, denotiamo con $\langle\langle x\rangle\rangle$ la *parte intera* di x, cioè $\langle\langle x\rangle\rangle \in Z$ è quell'intero tale che $x = \langle\langle x\rangle\rangle + r$ con $0 \leq r < 1$.
Consideriamo l'applicazione: $f : R \to Z$
$x \to \langle\langle x\rangle\rangle$
Se ρ_f è la relazione di equivalenza associata a f, cioè $x \,\rho_f\, y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$
a) Determinare la classe di equivalenza di ogni elemento di R;
b) Determinare l'insieme quoziente R/ρ_f;
c) Descrivere esplicitamente la biiezione canonica $R/\rho_f \leftrightarrow \mathrm{Im}(f)$.

2. Sia S un insieme e $(G, \ )$ un gruppo. Nell'insieme $X = G^S$ di tutte le funzioni di dominio S e codominio G si definisca l'operazione: $X \times X \to X$,
$(f, g) \to f * g$, dove $f * g : S \to G$ è definita da $(f * g)(s) = f(s)\ g(s)$. Mostrare che, rispetto a questa operazione, $X = G^S$ è un gruppo.

3. Sia G un gruppo. Mostrare che:
(a) Se G è abeliano, allora $(ab)^n = a^n b^n$ presi comunque $a, b \in G$ ed $n \geq 1$;
(b) Se $(ab)^2 = a^2b^2$ per ogni $a, b \in G$, allora G è abeliano;
(c) Se ogni elemento di G (diverso dall'elemento neutro) ha ordine 2, allora G è abeliano;
(d) Se G è finito (non banale) di ordine pari, allora G ha un elemento di ordine 2.

4. Siano $a, b \in R$ e $a \neq 0$. Sia $t_{a,b} : R \to R$ l'applicazione definita da $t_{a,b}(x) = ax + b$.
(a) Verificare che l'insieme $T := \{t_{a,b} : (a, b) \in R^* \times R\}$ è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.
(b) Mostrare che T non è commutativo.

5. Sia (G,) un gruppo. Determinare quali tra le seguenti proposizioni sono *vere*:
(a) Se H è un sottogruppo di G, allora H H = H.
(b) Se X è un sottoinsieme non vuoto di G e X X = X, allora X è un sottogruppo di G.
(c) Se X è un sottoinsieme finito (non vuoto) di G e X X = X, allora X è un sottogruppo di G.

6. Sia G un gruppo ed I un sottoinsieme non vuoto di G. Definiamo: $< I > := \{g_1^{z_1} \dots g_r^{z_r} : r \geq 1, g_i \in I, z_i \in Z \text{ per } 1 \leq i \leq r\}$.
Mostrare che:
(a) < I > è un sottogruppo di G (che si dice il sottogruppo di G *generato dal sottoinsieme* I);
(b) Se H è un sottogruppo di G e $I \subset H$, allora $< I > \subset H$ (cioè < I > è il più piccolo sottogruppo di G contenente I);
(c) $< I > = \cap \{H : I \subset H$ e H è un sottogruppo di G$\}$;
(d) Se $P \subset (R, \ )$ è l'insieme dei numeri interi primi, allora $< P > = (Q^*, \ )$.

7. Provare che l'insieme delle matrici del tipo
$z = \begin{matrix} a & b \\ c & 0 \end{matrix}$, con $a, b, c \in R$, è un gruppo rispetto alla somma di matrici.

8. Stabilire se l'insieme $G = \{(x, y) \in R^2 \mid x \neq 0\}$ è un gruppo rispetto al prodotto così definito: $(a, b)(c, d) = (ac, bc + d)$.