Università degli Studi Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2002/2003

ALGEBRA 1
Prof. M. Fontana
Tutorato 10 - Andrea Cova (11 dicembre 2002)

1. Sia G un gruppo e siano H, K sottogruppi di G. Mostrare che:
(a) $H \cap K$ è un sottogruppo di G;
(b) Se H è normale in G allora $H \cap K$ è un sottogruppo normale di K (non necessariamente di G, dare un esempio);
(c) Se H e K sono normali in G, allora $H \cap K$ è un sottogruppo normale di G;
(d) Se G è finito e MCD $(|H|, |K|) = 1$ (dove $|H|$ e $|K|$ sono gli ordini rispettivamente di H e K), allora $H \cap K = \{e\}$;
(e) $H \cup K$ non è necessariamente un sottogruppo di G (dare un esempio);
(f) $HK := \{hk : h \in H, k \in K\}$ è un sottogruppo di G se e soltanto se HK =KH;
(g) Se H è normale in G, allora $HK = < H \cup K >$ (sottogruppo generato da $H \cup K$);
(h) Se H e K sono normali in G, allora HK è un sottogruppo normale di G;
(i) Se H e K sono normali in G e $H \cap K = \{e\}$, allora hk = kh, comunque scelti $h \in H$ e $k \in K$.

2. Sia U il sottogruppo di (C^*,) formato da tutti i numeri complessi di modulo uguale ad 1 .
(a) Verificare che l'applicazione $\phi : (R, +) \to (U,)$ definita da $r \mapsto \cos 2\pi r + i \operatorname{sen} 2\pi r$ è un omomorfismo.
(b) Usando il Teorema Fondamentale di Omomorfismo, dimostrare che $U \cong R/Z$.

3. Sia X un insieme non vuoto. Sia (P(X), +,) l'anello di tutti i sottoinsiemi di X dove, presi comunque A, B $\in$ P (X), si pone per definizione:

$$A + B := (A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \Delta B \text{ (\textit{differenza simmetrica})};$$
$$A B := A \cap B.$$

(a) Mostrare che $P_f(X) := \{A \in P(X) : \text{Card}(A) \text{ è finita}\}$ è un ideale di P(X).
(b) Per ogni $Y \subset X$ mostrare che P(Y) è un ideale principale (cioè generato da un elemento) di P(X).
(c) Per ogni $Y \subset X$, verificare che l'applicazione: $P(X) \to P(Y)$, $A \mapsto A \cap Y$ è un omomorfismo suriettivo di anelli. Determinarne il nucleo.
(d) Per ogni $Y \subset X$, mostrare che l'applicazione:

$P(X) \to P(Y) \times P(X\setminus Y)$, $A \mapsto (A \cap Y, A \cap (X\setminus Y))$ è un isomorfismo di anelli.

4. Sia $f : N \to Z$ l'applicazione definita da:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \text{ pari:} \\ -1, & \text{se } x \text{ dispari.} \end{cases}$$

Se ρ_f è la relazione di equivalenza associata a f, cioè $x\rho y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$,
(a) Determinare la classe di equivalenza di ogni elemento di N;
(b) Determinare l'insieme quoziente N/ρ_f;
(c) Applicare il teorema di decomposizione per le funzioni.

5. Nel gruppo S_n sia $\tau = (i\ j)$ una trasposizione e σ una qualsiasi permutazione tale che $\sigma(i) = h$ e $\sigma(j) = k$; dimostrare che $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ è ancora una trasposizione. Nel caso particolare n=4 si sfrutti tale proprietà per dimostrare che il sottogruppo $V=\{id, (12) \circ (34), (13) \circ (24), (14) \circ (23)\}$ di S_4 è normale.

6. Sia $R=\{h/(2K+1) : h,k\in Z\}$; si domanda: i) R è un sottoanello di Q? ii) R è un campo?

7. Sia G un gruppo finito; dimostrare che l'applicazione φ di G in G tale che $\varphi(x)=x^2$ è un automorfismo di G se, e solo se, G è abeliano e non contiene elementi x, diversi dall'unità, tali che x^2=u.

8. Dimostrare che il sottoinsieme di C, $Z[i]=\{a+bi \mid a, b \in Z\}$, è un anello (commutativo unitario). Tale anello si chiama l'*anello degli interi di Gauss.*

9. Dimostrare che i sottoinsiemi di C

$$Q[i] = \{a+bi \mid a, b \in Q\}; \quad Q[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in Q\}$$

sono campi.