AL1 - TUTORATO 8 - 27/11/2002

(1) Determinare quali tra le seguenti applicazioni sono suriettive, quali iniettive e quali biiettive. Determinarne anche un'inversa a destra f'' se suriettiva, un'inversa a sinistra f' se iniettiva, l'inversa f^{-1} se biiettiva:

   (a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $f(x) := \begin{cases} \frac{5x+3}{x-2} \text{ se } x \neq 2 \\ 5 \text{ altrimenti} \end{cases}$

   (b) Per $n \geq 2$, $a \in \mathbb{Z}$ fissati:
   $f : \mathbb{Z} \to \frac{\mathbb{Z}}{\equiv_n}$
   $f(x) := [x + a]_{\equiv_n}$

   (c) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$
   $f(x) := (-1)^x \cdot x$

(2) Dato un qualunque insieme X e una qualunque applicazione $f : X \to P(X)$, si definisca

$$X^f := \{x \in X : x \notin f(x)\} \subseteq X$$

   (a) Dimostrare che non esiste x tale che $f(x) = X^f$.

   (b) Dedurre da a) che non esiste $f : X \to P(X)$ suriettiva qualunque sia X.

(3) Sia X un insieme finito e $f : X \to X$. Dimostrare che:

$$f \text{ iniettiva} \Leftrightarrow f \text{ suriettiva} \Leftrightarrow f \text{ biiettiva}$$

(4) Dimostrare che i seguenti insiemi sono gruppi rispetto alle operazioni indicate.

   (a) $G = \{1, -1, i, -i\}$ rispetto al prodotto, con $i \cdot i = -1$

   (b) $G = \mathbb{Z}$ rispetto all'operazione $x * y = x + y - a$, con $a \in \mathbb{Z}$ fissato

   (c) $G = \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ rispetto all'operazione $(a, b) \star (c, d) = (a + c, bd)$

   (d) Dato X un insieme, $(H, *)$ un gruppo:
   $G = H^X := \{f : X \to H\}$ rispetto all'operazione $(f \star g)(x) = f(x) * g(x)$