AL1 - Algebra 1: fondamenti - A.A. 2002/2003

Valutazione "in itinere" - I Prova

MATRICOLA (O ALTRO IDENTIFICATIVO): ....
COGNOME: .... **NOME:** ....

esercizio	1	2	3.1	3.2	4	5	6.1	6.2	6.3	7	8.1	8.2	9.1	9.2	10	11.1	11.2
punti max	2	2	5	3	3	3	2	3	2	4	3	2	2	4	4	3	5
punti assegnati																	
totale																	

AVVERTENZE : • *Svolgere gli esercizi in modo conciso, ma esauriente, nello spazio assegnato. Nel testo degli esercizi, eventuali riferimenti a fatti realmente accaduti sono del tutto casuali.*
• *Fino a* **2** *punti ulteriori potranno essere assegnati agli elaborati scritti in modo molto chiaro.*

ESERCIZIO 1. Dati tre insiemi A, B, C. Supponiamo che:

$$A \cap B = A \cap C \quad \text{e} \quad A \cup B = A \cup C\,,$$

allora quale delle seguenti affermazioni si può dedurre (dare una dimostrazione completa della risposta scelta):

(a) $A = B$; **(b)** $A = C$; **(c)** $B = C$; **(d)** $B \neq C$.

ESERCIZIO 2. Siano dati i seguenti insiemi $X := \{2, 4, 5, 6, 7\}$ e $Y := \{2, 6, 8\}$. Elencare le coppie ordinate che appartengono al grafico della corrispondenza da X ad Y definita da "$x \mid y$" (cioè, "x divide y", con $x \in X$, $y \in Y$.)

ESERCIZIO 3. (1) Nell'insieme degli interi relativi $\mathbb{Z}$ stabilire quali tra le seguenti proprietà **(R)** *Riflessiva,* **(S)** *Simmetrica,* **(T)** *Transitiva,* **(TT)** *Totale,* **(AS)** *Antisimmetrica,* sono soddisfatte dalla relazione:

$$x \;\rho\; y \quad :\Leftrightarrow \quad 9 \;\mid\; (2x + 7y)\,,$$

(cioè, 9 divide $2x + 7y$).

(2) Descrivere esplicitamente l'insieme $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \;\rho\; 3\}$.

ESERCIZIO 4. Scrivere *in base 3* il numero 471 [utilizzare i simboli $0, 1, 2$ e spiegare brevemente il procedimento seguito].

ESERCIZIO 5. Dati i numeri complessi $u =: 3 + 2i$ e $v := 4 - 3i$, determinare il numero complesso $z := x + iy$ in modo tale che $u = vz$.

ESERCIZIO 6. (1) Nel paese di Logilandia un giudice A accusa un pregiudicato B di essere un assassino. Qualche tempo dopo il giudice A subisce un tentativo di assassinio da parte di B. Aveva ragione A ? [Spiegare brevemente la risposta.]

(2) Enunciare una proposizione equivalente alla negazione della seguente proposizione: "in tutte le nazioni, tutti i delinquenti detestano tutti i poliziotti".

(3) Facendo seguito alla presentazione di un nuovo film, il noto critico Buono Comeilpane è incerto tra le seguenti due redazioni di un suo articolo per un giornale:

(a) "Mai un'attrice ha interpretato con tale passione il ruolo di protagonista";

(b) "Mai una così giovane ed affascinante attrice ha interpretato con tale passione il ruolo di protagonista".

Quale tra i precedenti apprezzamenti è più elogiativo. [Spiegare brevemente la risposta.]

ESERCIZIO 7. Nel villaggio dove trascorreva le vacanze il celebre matematico P.G. Dirichlet veniva parlata una lingua con un alfabeto di 21 lettere. Quanti abitanti (almeno) doveva avere tale villaggio affinché con certezza almeno 2 dei suoi abitanti avessero le stesse iniziali (di nome e cognome) ? [Spiegare brevemente la risposta.]

ESERCIZIO 8. Dati $a := 1929$, $b := 1326$, utilizzando l'algoritmo euclideo delle divisioni successive

(1) determinare $d := \text{MCD}(a, b)$ e da questo dedurre il $\text{mcm}(a, b)$.

(2) determinare un'espressione del tipo $d = ax + by$ (cioè determinare $x, y \in \mathbb{Z}$) [identità di Bézout].

ESERCIZIO 9. **(1)** In un processo che si tiene nel Paese dei Furfanti, tutti i **34** imputati sono accusati di aver commesso almeno uno dei seguenti reati: **(a)** corruzione; **(b)** evasione fiscale. Sapendo che **11** imputati sono indagati per il reato di corruzione e **24** sono indagati per il reato di evasione fiscale, quanti sono gli imputati indagati per entrambi i reati ?

(2) Nella città di Springfield, tutti i **1001** abitanti compiono regolarmente almeno una delle seguenti azioni:

(a) lavorano in una centrale nucleare ; **(b)** bevono birra; **(c)** mangiano ciambelle.

Sapendo che tra i **980** abitanti che mangiano ciambelle, ve ne sono **22** che lavorano in una centrale nucleare; tra **950** abitanti che bevono birra ve ne sono **915** che mangiano ciambelle; tra i **120** abitanti che lavorano in una centrale nucleare ve ne sono **119** che bevono birra; quanti sono gli abitanti di Springfield che mangiano ciambelle, bevono birra e lavorano in una centrale nucleare ?
[Spiegare brevemente il procedimento teorico utilizzato.]

ESERCIZIO 10. Dimostrare per induzione su $n \geq 1$ che vale una tra le seguenti identità:

(i) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{n(n+1)}{2}$;

(ii) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{(2n-1)!}{2}$;

(iii) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1) = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$.

ESERCIZIO 11 (Complementi). **(1)** Denotiamo con $a+b$ un circuito elettrico con due interruttori a, b posti in parallelo, con ab un circuito elettrico con due interruttori a, b posti in serie e con a' l'interruttore che agisce in maniera opposta ad un interruttore a. Determinare nell'algebra booleana dei circuiti elettrici se, tra i seguenti 3 circuiti, ve ne sono alcuni che hanno effetto equivalente sulla circolazione dell'elettricità:

(i) $ab + c(c' + b)(a' + cb')$;

(ii) $ab + a'bc$;

(iii) $(a + c)b$.

(2) Date tre proposizioni P, Q ed R. Tracciare la tabella della verità della proposizione:

$$(P \Rightarrow (\neg Q \vee R)) \wedge \neg (Q \vee (P \wedge R)) .$$

centerline**SOLUZIONI Soluzione Esercizio 1. (c)** .

I Soluzione. Se $A\Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ e se $A\Delta C := (A \cup C) \setminus (A \cap C)$, allora dalle ipotesi si ha che $A\Delta B = A\Delta C$. Quindi (utilizzando il fatto che l'operazione Δ è associativa):

$$B = \emptyset \, \Delta B = (A\Delta A)\Delta B = A\Delta(A\Delta B) = A\Delta(A\Delta C) = (A\Delta A)\Delta C = \emptyset \, \Delta C = C\,.$$

II Soluzione.

$$x \in A \wedge \quad \begin{cases} x \in B \;\Rightarrow\; x \in A \cap B = A \cap C \;\Rightarrow\; x \in C \\ x \notin B \;\Rightarrow\; x \notin A \cap B = A \cap C \;\Rightarrow\; x \notin C \end{cases}$$

$$x \notin A \wedge \quad \begin{cases} x \in B \;\Rightarrow\; x \in A \cup B = A \cup C \;\Rightarrow\; x \in C \\ x \notin B \;\Rightarrow\; x \notin A \cup B = A \cup C \;\Rightarrow\; x \notin C \end{cases}$$

Soluzione Esercizio 2. $G = \{(2,2),(2,6),(2,8),(4,8),(6,6\}$.

Soluzione Esercizio 3. (1) Si noti che:

$$\begin{aligned} 9 \mid (2x+7y) \;\Leftrightarrow\; 9 \mid (2x+7y-9y) \;\Leftrightarrow&\quad 9 \mid (2x-2y) \;\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow&\quad 9 \mid 2(x-y) \;\Leftrightarrow\; 9 \mid (x-y) \end{aligned}$$

dove l'ultima equivalenza è conseguenza del Lemma di Euclide (essendo MCD(9, 2) = 1). Pertanto:

$$x \,\rho\, y \;\Leftrightarrow\; x \equiv y \pmod 9\,.$$

In conclusione, la relazione ρ (come la relazione $\equiv_9$) è riflessiva, simmetrica e transitiva (cioè, è una relazione di equivalenza), ma non è né antisimmetrica né totale.

(2) Da (1) discende immediatamente che $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \,\rho\, 3\} = [x]_{\equiv_9} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x = 3 + k \cdot 9\,,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

Soluzione Esercizio 4.

$471 = 243+162+54+9+3+0 = 1\cdot 3^5+2\cdot 3^4+2\cdot 3^3+1\cdot 3^2+1\cdot 3^1+0\cdot 3^0 = (122110)_3\,.$

Soluzione Esercizio 5.

$$z = u \cdot v^{-1} = u \cdot \frac{\overline{v}}{\mathrm{N}(v)} = (3+i\ 2)\cdot \frac{4+i\ 3}{25} = \frac{6}{25} + i\ \frac{17}{25}\,.$$

Soluzione Esercizio 6. (a) In base agli elementi esposti, A non aveva ragione perché non sono dati – nel testo – elementi che implicano che B fosse un assassino al momento dell'accusa fatta da A.

(b) La Proposizione data è del tipo:

$$\forall\ x\,,\ \forall\ y\,,\ \ P(z)$$

la cui negazione è:

$$\exists\ x\,,\ \exists\ y\,,\ \neg\ P(z)$$

cioè: "*Esiste almeno una* nazione in cui *(esiste) almeno un* delinquente che *non* detesta tutti i poliziotti" o, equivalentemente, "*Esiste almeno una* nazione in cui *(esiste) almeno un* delinquente che *apprezza/stima almeno un* poliziotto".

(c) L'apprezzamento **(a)** è più elogiativo di **(b)** , perché **(a)** riguarda un insieme più ampio (non ci sono restrizioni) di quello di **(b)** (al quale sono poste delle condizioni).

Soluzione Esercizio 7. Tutte le possibili coppie sono $21 \times 21 = 21^2 = 441$. Quindi se nel villaggio vi sono almeno $442 = 441+1$ abitanti allora in esso vi saranno necessariamente almeno 2 abitanti con le stesse iniziali (Principio delle "gabbie dei piccioni" o dei "cassetti" di Dirichlet).

Soluzione Esercizio 8. (1)

$$\begin{aligned} 1929 &= 1326 \cdot 1 + 603 \\ 1326 &= 603 \cdot 2 + 120 \\ 603 &= 120 \cdot 5 + 3 \\ 120 &= 3 \cdot 60 + 0 \end{aligned}$$

quindi MCD(1929, 1326) $= 3$ e mcm(1929, 1326) $= \frac{1929 \cdot 1326}{3} = 852618$.

(2) $3 = 1929 \cdot 11 + 1326 \cdot (-16)$.

Soluzione Esercizio 9. (1) Card($A \cap B$)= Card(A) + Card(B) - Card($A \cup B$)= $11 + 24 - 34 = 1$.

(2) Card($A \cap B \cap C$)= Card($A \cup B \cup C$) - [Card(A) + Card(B) + Card(C)] + Card($A \cap B$) + Card($A \cap C$)+ Card($B \cap C$)= $1001 - [980 + 950 + 120] + 22 + 915 + 119 = 7$.

Soluzione Esercizio 10. (i) falsa ad esempio per $n = 3$.

(ii) falsa ad esempio per $n = 1$.

(iii) vera.

Base dell'induzione: se $n = 1$, è banalmente vero che $1 = \frac{(2 \cdot 1)!}{2^1 \cdot 1!} = 1$.

Passo Induttivo. *Ipotesi induttiva:* supponiamo vero che per un dato $k \geq 1$ si abbia:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1) = \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}.$$

Tesi: Mostriamo che:

$$1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1) = \frac{(2(k+1))!}{2^{k+1} \cdot (k+1)!}.$$

Ebbene,

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2k-1) \cdot (2k+1) &= \tfrac{(2k)!}{2^k \cdot k!} \cdot (2k+1) = \\ &= \tfrac{(2k)!}{2^k \cdot k!} \cdot (2k+1) \cdot \tfrac{2k+2}{2k+2} = \\ &= \tfrac{(2k)!}{2^k \cdot k!} \cdot (2k+1) \cdot \tfrac{2k+2}{2(k+1)} = \tfrac{(2(k+1))!}{2^{k+1} \cdot (k+1)!}. \end{aligned}$$

Soluzione Esercizio 11. (1) Si noti che:

$$\begin{aligned} ab + c(c'+b)(a'+cb') &= ab + (cc' + cb)(a' + cb') = ab + cb(a' + cb') = \\ &= ab + cba' + cbcb' = ab + cba' + cbb' = ab + cba' = \\ &= ab + a'bc = \\ &= (a + a'c)b = (a + a')(a + c)b = 1(a + c)b = \\ &= (a + c)b\,. \end{aligned}$$

Quindi i tre circuiti sono equivalenti.

Alla stessa conclusione si poteva arrivare considerando la tabella di flusso del circuito:

a	b	c	ab	$a(c'+b)$	$a'+cb'$	$ab+c(c'+b)(a'+cb')$	$ab+a'bc$	$(a+c)b$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	1	0	0	0

(2) La tabella della verità è la seguente:

P	Q	R	$\neg Q \vee R$	$(P \Rightarrow (\neg Q \vee R))$	$\neg(Q \vee (P \wedge R))$	$(P \Rightarrow (\neg Q \vee R)) \wedge \neg(Q \vee (P \wedge R))$
v	v	v	v	v	f	f
v	v	f	f	f	f	f
v	f	v	v	v	f	f
f	v	v	v	v	f	f
v	f	f	v	v	v	v
f	v	f	f	v	f	f
f	f	v	v	v	v	v
f	f	f	v	v	v	v