Tutorato di TN1 - Teoria dei Numeri

Andrea Susa

18 marzo 2002

(1) Determinare tutti i naturali tali che valgano contemporaneamente -le seguenti condizioni:
(a) $2 \mid n$, $3 \mid n+1$, $4 \mid n+2$, $5 \mid n+3$, $6 \mid n+4$;
(b) $3 \mid n$, $4 \mid n+1$, $5 \mid n+2$, $7 \mid n+3$.

(2) Studiare le seguenti equazioni diofantee lineare in tre incognite al variare dei parametri $\lambda, \nu \in \mathbb{Z}$:
(a) $(\lambda-1)X+3Y+(3+\nu)Z=6$;
(b) $(2\lambda+1)X+10Y+(1+2\nu)Z=25$

(3) Determinare le soluzioni dei seguenti sistemi al variare di λ:

$$\text{(a)} \begin{cases} 3X+4Y & \equiv 3 \pmod 7 \\ 2X+\lambda Y & \equiv 1 \pmod 7 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \begin{cases} X+Y & \equiv 1 \pmod{11} \\ 4X+\lambda Y & \equiv 7 \pmod{11} \end{cases}$$

(4) Verificare le seguenti proprietà dell'Indicatore di Eulero:
(a) $\varphi(3n) = 3\varphi(n)$ se e soltanto se $3 \mid n$;
(b) $\varphi(3n) = 2\varphi(n)$ se e soltanto se $3 \nmid n$;
(c) $\varphi(n) = \varphi(n+2)$ se $n = 2(2p-1)$, dove p e $2p-1$ sono entrambi primi dispari;
(d*) per ogni $m, n \in \mathbb{N}$, posto $d = MCD(m,n)$, allora

$$\varphi(n)\varphi(m) = \varphi(mn)\frac{\varphi(d)}{d}.$$

Soluzioni esercizio (4)

(a) Senza perdere di generalità, possiamo supporre $n = 3^s \cdot m$, dove $s \geq 0$ e MCD$(3, m)$= 1.
($\Leftarrow$) Sia $s > 0$, cioè n è divisibile per 3. Allora:

$$\begin{aligned}\varphi(3n) &= \varphi(3^{s+1}m) = \varphi(3^{s+1})\varphi(m) \\ &= 3^s(3-1)\varphi(m) = 3(2 \cdot 3^{s-1})\varphi(m) \\ &= 3\varphi(3^s)\varphi(m) = 3\varphi(3^s m) \\ &= 3\varphi(n).\end{aligned}$$

($\Rightarrow$) È una conseguenza del punto (b).

(b) ($\Leftarrow$) Sia $s = 0$, cioè $3 \nmid n$. Allora $\varphi(3n) = \varphi(3)\varphi(n) = 2\varphi(n)$.

($\Rightarrow$) Per assurdo $s > 0$ e $\varphi(3n) = 2\varphi(n)$. Allora per (a) $\varphi(3n) = 2\varphi(n) = 3\varphi(n)$, cioè $2 = 3$, e questo è assurdo.

(c) Sia $n = 2(2p-1)$, con $p, 2p-1$ primi dispari. Allora

$$\varphi(n) = \varphi(2)\ \varphi(2p-1) = 2p-2 = 2(p-1).$$

Consideriamo adesso $n+2$:

$$\varphi(n+2) = \varphi(4p-2+2) = \varphi(4)\ \varphi(p) = 2(p-1).$$