

## Tutorato di TN1 - Teoria dei Numeri

Andrea Susa

25 febbraio 2002

1.) Sia  $n \geq 2$  dispari. Allora:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k \equiv 0 \pmod{n}.$$

2.) Sia  $n \geq 2$ . Allora:

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^3 \equiv 0 \pmod{n}.$$

3.) Dimostrare che, se  $a \equiv b \pmod{2n}$ , allora  $a^2 \equiv b^2 \pmod{4n}$ .

4.) Se  $2^n - 1$  è primo, dimostrare che  $n$  è primo. È vero il viceversa?

5.) (Formula “Sbagliata”)

Sia  $p$  un primo. Allora per ogni intero  $a, b$ , abbiamo che:

$$(a + b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}.$$

6.\*) Sia  $p \geq 5$  un primo. Dimostrare che la somma dei prodotti a due a due dei numeri  $1, 2, \dots, p-1$  è divisibile per  $p$ . (*Seguire i seguenti passi*)

(i)  $p = 5$ . Allora  $p \mid 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2$ .

(ii) Verificare che esiste un analogo di (i) per  $p = 7$ .

(iii) Verificare che

$$\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} (p-k) \cdot k \equiv 0 \pmod{p}.$$