Tutorato di TN1 - Teoria dei Numeri

Andrea Susa

20 maggio 2002

Definiamo le seguenti funzioni aritmetiche: per ogni $n \geq 1$

$$\tau(n) = \sum_{d|n} 1, \qquad \sigma(n) = \sum_{d|n} d$$

ed indichiamo con $\varphi(n)$ l'Indicatore di Eulero, e con $\mu(n)$ la funzione di Inversione di Moebius.

(1) Dimostrare che τ e σ sono funzioni moltiplicative.

(2) Mostrare le seguenti proprietà di σ:
(a) se $n = 2^{k-1}$, con $k \geq 2$, allora $\sigma(n) = 2n - 1$;
(b) se $p = 2^k - 1$ è primo, allora $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ è tale che $\sigma(n) = 2n$;
(c) se $p, p + 2$ sono primi gemelli, allora $\sigma(p + 2) = \sigma(p) + 2$;
(d) dimostrare che non esiste n tale che $\sigma(n) = 10$.

(3) (a) Determinare sotto quali condizioni si ottiene che $\tau(n) = \tau(n + 1)$ e determinare il più piccolo n per cui vale;
(b) Determinare sotto quali condizioni si ottiene che $\tau(n) = \tau(n + 1) = \tau(n + 2)$ e determinare il più piccolo n per cui vale;
(c) Verificare che, per $n = 3655$, si ha che $\tau(n) = \tau(n + 1) = \tau(n + 2) = \tau(n + 3)$.

(4) Dimostrare che p è primo se e soltanto se

$$\sigma(n) + \varphi(n) = n\tau(n).$$

(5) Definiamo, per $n \geq 1$ le seguente funzioni:

$$F_1(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\tau(d), \qquad F_2(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right)\sigma(d)$$

Dopo aver verificato che F_i sono moltiplicative, determinarne il valore.