Tutorato di TE1 - Teoria delle Equazioni

Andrea Susa

27 marzo 2002

(1) Sia $f(x) = x^3 - x + 3$ un polinomio su $\mathbb{Q}$, indichiamo con $\mathbb{K}$ il suo campo di spezzamento e sia $G = Gal(\mathbb{K} : \mathbb{Q})$ il suo gruppo di Galois.
(a) Descrivere $\mathbb{K}$, stabilire se l'estensione è semplice ed eventualmente determinarne un generatore;
(b) Determinare il grado dell'estensione.
(c) Descrivere il gruppo di Galois G, specificare a quale gruppo finito è isomorfo ed esplicitare l'isomorfismo.

(2) Sia $f(x) = x^5 + 2x^3 - x^2 + x - 1$ un polinomio su $\mathbb{F}_5$, indichiamo con $\mathbb{K}$ il suo campo di spezzamento e sia $G = Gal(\mathbb{K} : \mathbb{F}_5)$ il suo gruppo di Galois.
(a) Descrivere $\mathbb{K}$, stabilire se l'estensione è semplice ed eventualmente determinarne un generatore;
(b) Determinare il grado dell'estensione.
(c) Descrivere il gruppo di Galois G, specificare a quale gruppo finito è isomorfo ed esplicitare l'isomorfismo.

(3) L'angolo $\alpha = \frac{2\pi}{18}$ può essere costruito con riga e compasso?

(4) Sia $L \supseteq K$ un'estensione di campi, e sia $f \in K[x]$. Rispondere vero o falso alle seguenti:
(a) Ciascun $\phi : \ K \longrightarrow L$ che è un autormorfismo di K è un automorfismo di L.
(b) L'unico automorfismo di L è l'identità.
(c) Il gruppo di Galois di $L : K$ è ciclico.
(d) Il gruppo di Galois di $\mathbb{C} : \mathbb{R}$ è ciclico.
(e) $Gal(L : K) = 1$ se e soltanto se $L = K$.
(f) Ciascuna estensione normale è il campo di spezzamento di un qualche polinomio.
(g) Ogni sottocampo di $\mathbb{C}$ è il campo di spezzamento di un qualche polinomio a coefficienti razionali.
(h) Tutte le radici di f che non sono in L sono in K.
(i) Se f è irriducibile ed ammette una radice in L, allora ammette tutte le radici in L.
(l) Se L è il campo di spezzamento di f, allora $[L : K] = \deg f$.
(m) Se L è il campo di spezzamento di f, allora $[L : K] = (\deg f)!$.
(n) Se $K = \mathbb{Q}$ e L è ciclotomica, allora il gruppo di Galois è ciclico.

(5) Sia $\xi = \xi_{10}$ una radice primitiva 10-esima dell'unità.
(1) Determinare il polinomio minimo di ξ su $\mathbb{Q}$.
(2) Costruire l'estensione $\mathbb{Q}(\xi)$ esplicitandone una base e determinarne il grado su $\mathbb{Q}$.

★ ★ ★ ★ ★ ★

Esercizi per Casa

(1) Sia $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polinomio, ed indichiamo con $\mathbb{K}(f)$ il suo campo di spezzamento. Determinare il gruppo di Galois G dei seguenti polinomi, specificare a quale gruppo finito è isomorfo e, per ogni sottogruppo proprio, determinare i sottocampi invarianti:
(a) $f(x) = x^3 - x + 3$;
(b) $f(x) = x^4 + x^2 - 1$;
(c) $f(x) = x^4 + x^3 + x + 1$;
(d) $f(x) = x^6 - 2$.

(2) Sia $f(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ un polinomio, ed indichiamo con $\mathbb{K}(f)$ il suo campo di spezzamento. Determinare il gruppo di Galois G dei seguenti polinomi, specificare a quale gruppo finito è isomorfo e, per ogni sottogruppo proprio, determinare i sottocampi invarianti:
(a) $f(x) = x^2 - 7$, con $p = 3, 5$;
(b) $f(x) = x^3 - 3$, con $p = 2, 3, 5$;
(c) $f(x) = x^5 - 1$ con $p = 7$;
(d) $f(x) = x^4 - 2$ con $p = 5, 7$.

(3) Mostrare le seguenti affermazioni:
(a) Sia $f(x) \in F[x]$ un polinomio, F un campo ed indichiamo con $\mathbb{K}(f)$ il suo campo di spezzamento. Mostrare che il gruppo di Galois di f è isomorfo ad S_n se e soltanto se $[\mathbb{K}(f) : F] = n!$.
(b) Per ogni p primo, il gruppo di Galois del p-esimo polinomio ciclotomico su $\mathbb{Q}$ è isomorfo ad un sottogruppo proprio di S_p. Determinare tale sottogruppo.
(c) Sia $\xi_n = \exp^{\frac{2\pi i}{n}}$. Se $\mathrm{MCD}(r, s) = 1$, allora $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_{rs})) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_r)) \times \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\xi_s))$. Esplicitare tale isomorfismo per $r = 3, s = 5$.

(4) Descrivere le seguenti estensioni dei razionali, indicando se l'estensione è normale ed eventualmente trovarne un generatore:
(a) $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{1+\sqrt{2}}, i-1, i\sqrt{2})$;
(b) $\mathbb{Q}(\sqrt{e+1}, i, \sqrt{2})$;
(c) $\mathbb{Q}(e^{2\pi i}, i)$.