Tutorato di TE1 - Teoria delle Equazioni

Andrea Susa

6 marzo 2002

(1) Se $\mathbb{K}$ è il campo di spezzamento di $f \in \mathbb{Q}[X]$, determinare $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}]$ e descrivere $\mathbb{K}$ quando f è uno dei seguenti polinomi:
(a) $X^4 - 5X^2 + 6$;
(b) $X^4 - X^3 - 3X + 3$;
(c) $X^4 - 2X^3 + X^2 - X - 2$.

(2) Sia $F \supseteq \mathbb{K}$ un ampliamento di campi e siano $\alpha, \beta \in F$ algebrici su $\mathbb{K}$, di polinomi minimi $m_\alpha(X)$ e $m_\beta(X)$. Mostrare che, se i gradi di $m_\alpha(X)$ e di $m_\beta(X)$ sono coprimi, allora $m_\beta(X)$ è irriducibile su $\mathbb{K}(\alpha)$ e $m_\alpha(X)$ è irriducibile su $\mathbb{K}(\beta)$.

(3) Sia $f(X) = X^3 + 3X + 3 \in \mathbb{F}_5[X]$.
(a) Mostrare che f è irriducibile su $\mathbb{F}_5$.
(b) Sia α una radice di f in un suo campo di spezzamento. Calcolare l'inverso di $\alpha + 1$ e α^2 in $\mathbb{F}_5(\alpha)$.

(4) Verificare se i seguenti polinomi sono irriducibili su $\mathbb{F}_p$, determinarne il campo di spezzamento ed il suo grado su $\mathbb{F}_p$ nei seguenti casi:
(a) $f(X) = X^3 + 2X + 1$, per $p = 3, 5$;
(b) $f(X) = X^4 + 5$, per $p = 2, 3, 7$.