Tutorato di TE1 - Teoria delle Equazioni

Andrea Susa

20 febbraio 2002

(1) Mostrare le seguenti affermazioni:

(i) Se D è un dominio e $\mid D \mid < \infty$, allora D è un campo.

(ii) Se $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n$ è una catena di campi, allora $\cup_{k=1}^{n} F_k = F$ è ancora un campo.

(iii) $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \cup \mathbb{Q}\left(\sqrt{3}\right)$ è un campo?

(2) Descrivere le seguenti estensioni di campi, considerando che ξ_n è una radice primitiva n-esima dell'unità.

(i) $\mathbb{Q}(\xi_4)$;

(ii) $\mathbb{Q}(\xi_5)$;

(iii) $\mathbb{Q}(\xi_3, \sqrt{2})$.

(3) Sia $K = \{0, 1, \alpha, \beta\}$, dotato di somma e prodotto in cui valgono le seguenti leggi di composizione:

$$\begin{cases} 1 + \alpha = \beta \\ \alpha + \alpha = \beta + \beta = 1 + 1 = 0 \\ \alpha^2 + \beta = 0. \end{cases}$$

Mostrare che K è un campo. Determinare inoltre il suo sottocampo fondamentale (o primo).

(4) Consideriamo le seguenti applicazioni tra campi, dove indichiamo con $\mathbb{F}_p$ il campo finito con p elementi. Verificare quali sono omomorfismi, quali isomorfismi e/o automorfismi:

(i) $\quad \phi : \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p, \qquad x \longmapsto x^p;$

(ii) $\quad \phi : \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \longrightarrow \mathbb{Q}\left(-\sqrt{3}\right), \qquad x + y\sqrt{2} \longmapsto x - y\sqrt{3};$

(iii) $\quad \phi : \mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) \longrightarrow \mathbb{Q}\left(-\sqrt{2}\right) \qquad x + y\sqrt{2} \longmapsto x - y\sqrt{2}.$

(5) Sia D un dominio, $K = Qf(D)$ il suo campo delle frazioni e F un altro campo. Provare che ogni omomorfismo iniettivo $\phi : \; D \longrightarrow F$ ha un'unica estensione ad un omomorfismo iniettivo $\psi: \ K \longrightarrow F$ così definito: $\frac{a}{b} \longmapsto \frac{\phi(a)}{\phi(b)}$.