Tutorato TE1, 3/5/2002

1. Determinare una base di trascendenza di $\mathbf{C}(X, X+\frac{1}{X})$ su $\mathbf{C}$ dove X è una indeterminata.

2. Trovare una base di trascendenza di $\mathbf{Q}(e, \sqrt{3})$.

3. Calcolare il grado di trascendenza delle seguenti estensioni di $\mathbf{Q}$:

- i $\mathbf{Q}(t, u, v, w)$, dove t, u, v, w sono elementi trascendenti su $\mathbf{Q}$ ed indipendenti;
- ii $Q(t, u, v, w)$, dove $t^2 = 2$, u è trascendente su $\mathbf{Q}(t)$, $v^3 = t + 5$, e w è trascendente su $\mathbf{Q}(t, u, v)$;
- iii $\mathbf{Q}(t, u, v)$, dove $t^2 = u^3 = v^4 = 7$.

4. Dire se le seguenti sono vere o false. Motivare le risposte:

(1) Due estensioni isomorfe finitamente generate su F hanno stesso grado di trascendenza su F.

(2) se $t_1, ..., t_n$ sono elementi algebricamente indipendenti, allora i loro polinomi simmetrici elementari sono pure elementi algebricamente indipendenti;

(3) il gruppo di Galois del polinomio generale di grado n è risolubile per ogni n;

(4) il polinomio generale di grado 5 è risolubile per radicali;

(5) il polinomio generale di grado n su K è un polinomio in una indeterminata su K.

5.* Sia $t^3 + at^2 + bt + c$ il polinomio minimo di θ su $\mathbf{Q}$. Determinare condizioni necessarie e sufficienti su a, b, c tali che $\theta = \varphi^2$ dove $\varphi \in \mathbf{Q}(\theta)$.