Soluzioni tutorato VI - Lunedì 5 novembre 2001

1. (a) Sia $x > 0$. $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(x(1+\Delta x/x))-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln x+\ln(1+\Delta x/x)-\ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\ln(1+\Delta x/x)}{(\Delta x/x)\cdot x} = \frac{1}{x}$

   (b) $g'(x) = A^x \ln A$. Per dimostarlo occorre calcolare $\lim_{\Delta x\to 0} \frac{A^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x \ln A}-1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{e^{\Delta x \ln A}-1}{\Delta x \ln A} \ln A = \ln A$ (cfr. tutorato V)

2. (a) $4x+4$

   (b) $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

   (c) $\frac{1}{(x+1)^2}$

   (d) $\frac{(1+\sqrt[3]{x})^2}{\sqrt[3]{x^2}}$

   (e) $-\frac{\sin x}{\cos x} = -\tan x$

   (f) $x^x = e^{x\ln x}$. Quindi la derivata di x^x è $x^x(\ln x + 1)$

3. Gli intervalli di crescenza (risp. decrescenza) sono gli intervalli in cui la derivata è (strettamente) positiva (risp. negativa).
   $f'(x) = 2\sin x\cos x = \sin(2x)$. $\sin(2x) > 0 \Leftrightarrow 2k\pi < 2x < \pi + 2k\pi\ \forall k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k\pi < x < \frac{\pi}{2} + k\pi$. Quindi gli intervalli di crescenza sono $I_k = \left(k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi\right)\ \forall k \in \mathbb{Z}$ mentre gli intervalli di decrescenza sono $J_k = \left(\frac{\pi}{2}+k\pi, \pi+k\pi\right)\ \forall k \in \mathbb{Z}$
   $g'(x) = 2x+b$. $2x+b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{2}$. Quindi l'intervallo di crescenza per $g(x)$ è $I = (-\frac{b}{2}, +\infty)$ mentre l'intervallo di decrescenza è $J = (-\infty, -\frac{b}{2})$.

4. (a) $f(x) =$
$$\begin{cases} x^4+3x^2+x & (x \le 0) \\ ax^2+b & (x > 0) \end{cases}$$
   (con $a, b \in \mathbb{R}$)
   Per $x < 0$ $f(x)$ è continua (somma e prodotto di funzioni continue). Analog. per $x > 0$. Quindi affinché $f(x)$ sia continua basta verificare la continuità in 0. $f(x)$ è continua in 0 $\Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$. Quindi $f(x)$ è continua $\Leftrightarrow b = 0$. Poiché una funzione derivabile è continua, l'essere $b = 0$ è condizione necessaria affinché $f(x)$ sia derivabile. Per $x < 0$ $f(x)$ è derivabile e la sua derivata è $4x^3+6x+1$. Per $x > 0$ $f(x)$ è derivabile e la sua derivara è $2ax$. In 0 $f(x)$ è derivabile $\Leftrightarrow$ esiste il limite del rapporto incrementale, cioè $\Leftrightarrow$ i limiti del rapporto incrementale da sinistra e da destra esistono e coincidono. Perciò $f(x)$ non è derivabile in 0 per nessun valore di a.

(b) $g(x) =$

$$\begin{cases} x^3 & (x \leq 1) \\ 3x-2 & (x > 1) \end{cases}$$

La funzione $g(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ poiché il limite per x che tende a 1 da sinistra e da destra $= f(1) = 1$ Per $x < 1$ $g(x)$ è derivabile e la sua derivata è $3x^2$. Per $x > 1$ $g(x)$ è derivabile e la sua derivata è 3. Visto che in 1 esiste il limite del rapporto incrementale $= 3$ si ha che $g(x)$ è derivabile su tutto $\mathbb{R}$.

(c) $h(x) =$

$$\begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & (x > 0) \\ x^3 & (x \leq 0) \end{cases}$$

Per $x > 0$ $h(x)$ è continua poiché prodotto $\left(x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}\right)$, composizione $\left(\sin(\frac{1}{x})\right)$, inversa $\left(\frac{1}{x},\ x \neq 0\right)$ di funzioni continue. Visto che $-x^2 \leq x^2 \sin\frac{1}{x} \leq x^2$ per il teorema dei carabinieri $\lim_{x\to 0^+} h(x) = 0 = h(0) = \lim_{x\to 0^-} h(x)$, perciò $h(x)$ è continua su tutto $\mathbb{R}$. Se $x > 0$ $h'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$. Se $x < 0$ $h'(x) = 3x^2$. Per definizione $h'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{h(0+t)-h(0)}{t}$. Visto che $\lim_{t\to 0^+} \frac{t^2\sin(1/t)}{t} = \lim_{t\to 0^+} t\sin(1/t) = 0 = \lim_{t\to 0^-} \frac{t^3}{t}$, $h(x)$ è derivabile anche in 0 e la sua derivata in 0 vale 0. Si noti tuttavia che $h'(x)$ non è continua in 0 poiché non esiste il limite (per x che che tende a 0^+) di $2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$.