ICA - Soluzioni tutorato III

Martedì 16 ottobre 2001

1. (a) L'equazione non ha soluzioni reali visto che $\forall x \in \mathbb{R},\ 3^x + 3 > 3$ mentre $2 \sin x \leq 2$

   (b) Ci si riconduce all'equazione $\sin(2x) = \frac{1}{2}$ che ha soluzione $x = \frac{\pi}{12} + k\pi$ oppure $x = \frac{5\pi}{12} + k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Imponendo quindi le condizioni di esitenza $\sin x > 0$ e $\cos x > 0$ si ha che la dis. iniziale ha soluzioni $x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi$ oppure $x = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

2. (a) $x \in \left(\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{5}{3}\pi + 2k\pi\right),\ \forall k \in \mathbb{Z}$

   (b) Soluzione: $\frac{3}{4}\pi + 2k\pi < x < \frac{7}{4}\pi + 2k\pi$
   Infatti prima di tutto si noti che, essendo $1 + \sin x \geq 0$ sempre, si può togliere il modulo. Quindi ci si riconduce allo studio della dis. (*) $\sin x + \cos x < 0$, che si può risolvere in almeno quattro modi:

   - Essendo (*) **omogenea di I grado** in seno e coseno si può dividere per $\cos x$ in modo da ottenere delle dis. elementari in funzione della tangente (ad esempio $\tan x < -1$). Naturalmente si deve esaminare dapprima se $\cos x = 0$ verifica la disequazione e poi, supponendo $\cos x \neq 0$, tenere conto del segno di $\cos x$.
   - Si possono utilizzare le **formule parametriche** $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ dove $t = \tan \frac{x}{2}$. In tal modo si ottiene una nuova dis. in t che, però, è equivalente a (*) se e solo se $\frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ cioè $x \neq \pi + 2k\pi$. Bisogna perciò discutere a parte il caso $x = \pi$.
   - Si può utilizzare il **metodo grafico** cioè, ponendo $X = \cos x, Y = \sin x$, risolvere graficamente il sistema $\begin{cases} X + Y & < 0 \\ X^2 + Y^2 & = 1 \end{cases}$

- Si può utilizzare il **metodo dell'angolo aggiunto** cioè moltiplicare (*) per un $a > 0$ da determinare e fare in modo che $a = \cos\alpha$, $a = \sin\alpha$ per qualche α. Dalla relaz. fond. tra seno e coseno si ha $a^2 + a^2 = 1$ quindi $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Sia allora $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$, perciò $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Ci si è ricondotti allo studio della dis. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) < 0$.

(c) Si noti che, affinché $\sqrt{\cos x}$ sia definita si deve avere $\cos x \geq 0$. Si può quindi togliere il modulo. Quando $\cos x = 0$ o $\cos x = 1$ la dis. non è verificata. Altrimenti $0 < \cos x < 1 \Rightarrow$ dis. verificata. Soluzione: $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \setminus \{2k\pi\},\ \forall k \in \mathbb{Z}$

3. Si ponga $t = 3^x$. L'equazione ha soluzione $\Leftrightarrow$ l'equazione $t^2 - 4\alpha t + \alpha^2$ ha una sol. strett. positiva. Perciò l'equazione di partenza ha soluzione $\Leftrightarrow \alpha > 0$