Università degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002

Tutorato GE4 - 18/12/2001

Esercizio 0.1. *(Do Carmo-Es.16 pag.230)*
Sia $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$*, dove*

$$U = \{(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2; 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\},$$

$$\mathbf{x}(\theta, \varphi) = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta),$$

è una parametrizzazione della sfera unitaria S^2*. Sia*

$$\lg\tan\frac{1}{2}\theta = u, \quad \varphi = v,$$

e mostrare che una nuova parametrizzazione di $\mathbf{x}(U) = V$ *può essere data da*

$$\mathbf{y}(u, v) = (sechu\ cosv, sechu\ sinv, tanhu).$$

Mostrare che nella parametrizzazione $\mathbf{y}$ *i coefficienti della prima forma fondamentale sono*

$$E = G = sech^2 u, \quad F = 0.$$

Quindi $\mathbf{y} : V \subset S^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *è una mappa conforme che trasforma meridiani e paralleli di* S^2 *in rette del piano. E' detta la* **proiezione di Mercatore**.

Esercizio 0.2. *(Do Carmo-Es.10 pag.229)*
Sia S *una superficie di rivoluzione. Mostrare che le rotazioni attorno al suo asse sono isometrie di* S.

Esercizio 0.3. *(Do Carmo-Es.14 pag.229)*
Si dice che un' applicazione differenziabile $\varphi : S_1 \to S_2$ *preserva gli angoli quando per ogni* $p \in S_1$ *e per ogni coppia* $v_1, v_2 \in T_p(S_1)$ *abbiamo*

$$\cos(v_1, v_2) = \cos(d\varphi_p(v_1), d\varphi_p(v_2)).$$

Mostrare che φ *è localmente conforme se e solo se preserva gli angoli.*

Esercizio 0.4. *(Do Carmo-Es.6 pag.237)*
Mostrare che non esiste una superficie $\mathbf{x}(u,v)$ *tale che*
$E = G = 1,\ F = 0$
$e = \cos^2 u,\ f = 0,\ g = -1.$