Universitá degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002

Tutorato GE4 - 20/11/2001

Esercizio 0.1. *Sia* Σ *una superficie regolare ricoperta da carte locali* (φ_1, V_1) *e* (φ_2, V_2)*. Assumiamo che* $V_1 \cap V_2$ *abbia due componenti connesse* W_1, W_2 *e che lo Jacobiano del cambiamento di coordinate sia positivo in* W_1 *e negativo in* W_2.

Mostrare che Σ *non è orientabile.*

Esercizio 0.2. *Siano*

- $\gamma(u) = (2\cos u, 2\sin u, 0)$, *con* $u \in [0, 2\pi]$, *un cerchio di raggio* 2
- $\pi(u)$ *il piano che contiene l'asse* z *e il vettore* $\gamma(u)$
- $d(u) \subset \pi(u)$ *il vettore unitario che forma un angolo di* $u/2$ *con il piano orizzontale* $z = 0$

(i) *Verificare che* $d(u) = (\cos u/2 \ \cos u, \cos u/2 \ \sin u, \sin u/2)$ *e quindi* $d(0) = -d(2\pi)$.

L'immagine Σ *dell' applicazione*

$$\begin{array}{rccc} \overline{x}: & [0, 2\pi] \times (-1, 1) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) & \longmapsto & \gamma(u) + v d(u) \end{array}$$

è un nastro di Möbius.

Notare che per $u = u_0$ *fissato* $\overline{x}(u_0, v)$ *descrive il segmento aperto di raggio* 1, *centrato nel punto* $\gamma(u_0)$ *nella direzione di* $d(u_0)$, *che al variare di* $u \in [0, 2\pi]$ *descrive un angolo di ampiezza* π *con il piano orizzontale.*

(ii) *Mostrare che* $\overline{x}$ *NON è iniettiva e trovare il più grande aperto* $U \subseteq [0, 2\pi] \times (-1, 1)$ *su cui* $\overline{x}$ *è iniettiva.*

Sia x_1 *la restrizione* $x|_U$.

(iii) *Mostrare che* (x_1, U) *è una carta locale su* Σ.

In modo simile consideriamo la carta locale

$$x_2(s,t) = (-(2+t\cos(\pi/2+\pi/4))\sin s, (2+t\cos(s/2+\pi/4))\cos s, t\sin(s/2+\pi/4))$$

con $(s,t) \in (0, 2\pi) \times (-1, 1) := V$.

(iv) *Notare che* $Im(x_2) = \Sigma \setminus \{(0, \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2}t) : t \in (-1,1)\}$ *e quindi* Σ *è una superficie ricoperta dalle carte locali* $(x_1, U), (x_2, V)$.

(v) *Dimostrare che l'intersezione* $x_1(U) \cap x_2(V)$ *ha due componenti connesse* W_1 *e* W_2 *e che lo Jacobiano vale* 1 *su* W_1 *e* -1 *su* W_2.

Si può quindi concludere che il nastro di Möbius Σ *non è orientabile.*

Soluzioni

Soluzione esercizio 0.1. *Sappiamo che $\Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ è orientabile se e solo se $\exists$ un campo di versori normali,cioè un' applicazione liscia, $N : \Sigma \to S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ definita da $p \mapsto N_p$ con $N_p \perp T_p\Sigma$ per ogni p.*

In ogni punto $p \in \Sigma \subseteq \mathbb{R}^3$ ci sono solo due possibili scelte di versore normale N_p.

Siano

$$\begin{array}{rccc} x: & U_1 & \longrightarrow & V_1 \\ & (u,v) & \longmapsto & x(u,v) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} y: & U_2 & \longrightarrow & V_2 \\ & (s,t) & \longmapsto & y(s,t) \end{array}$$

le due carte che coprono Σ con $V_1 \cap V_2 = W_1 \amalg W_2$ le due scelte di versore normale su V_1 sono date da $\pm\frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}$ e su V_2 da $\pm\frac{y_s \wedge y_t}{|y_s \wedge y_t|}$.

Nell'intersezione $V_1 \cap V_2$ avremo

$$(*) \qquad \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|} = \frac{y_s \wedge y_t}{|y_s \wedge y_t|}$$

con il segno dato da J, dove $J = det\left(\frac{\partial(u,v)}{\partial(s,t)}\right)$ è il determinante della matrice cambio di coordinate.

Per assurdo sia $N : \Sigma \to S^2$ un' orientazione su $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, possiamo supporre, dopo aver eventualmente scambiato u con v, che $N = \frac{x_u \wedge x_v}{|x_u \wedge x_v|}$ su V_1 e similmente $N = \frac{y_s \wedge y_t}{|y_s \wedge y_t|}$ su V_2, questo è assurdo perché per $(*)$ se N è ben definito su W_1 non può essere ben definito su W_2 e viceversa.

Soluzione esercizio 0.2. **(ii)** $U = (0, 2\pi) \times (-1, 1)$

(iii)*Per il punto precedente e per la Prop. pag.64 basta verificare le condizioni 1 e 3.*

Condizione 1:

$$x_1(u,v) = ((2 + v\cos u/2)\cos u, (2 + v\cos u/2)\sin u, v\sin u/2)$$

è C^∞ perché ogni sua componente lo è.

Condizione 3: dx_1 ha rango 2 su U. Infatti, per assurdo sia $rg\ dx_1 \leq 1$, cioè x_u è parallelo a x_v per qualche $(u,v) \in U$.

$$x_u = \begin{pmatrix} -(2+v\cos u/2)\sin u - v/2\cos u \sin u/2 \\ (2+v\cos u/2)\cos u - v/2 \sin u \sin u/2 \\ v/2\cos u/2 \end{pmatrix} \; e \; x_v = \begin{pmatrix} \cos u \cos u/2 \\ \sin u \cos u/2 \\ sin u/2 \end{pmatrix}$$

Osserviamo che il minore $M_1 = (2+v\cos u/2)\cos u/2 = 0 \iff \cos u/2 = 0 \iff u/2 = \pi/2, 3/2\pi$, *ma in questo caso:*

$$\begin{cases} x_u(\pi/2, v) = (-2 - \frac{\sqrt{2}}{2}v, -\frac{\sqrt{2}}{4}v, \frac{\sqrt{2}}{4}v) \\ x_v(\pi/2, v) = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{cases} \quad quindi \; rg M_1 = 2$$

oppure

$$\begin{cases} x_u(3/2\pi, v) = (2 - \frac{\sqrt{2}}{2}v, \frac{\sqrt{2}}{4}v, -\frac{\sqrt{2}}{4}v) \\ x_v(3/2\pi, v) = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \end{cases} \quad quindi \; rg \; M_1 = 2.$$

(v) $W_1 = \{x(u,v) : u \in (\pi/2, 2\pi)\}$ *e* $W_2 = \{x(u,v) : u \in (0, \pi/2)\}$.

Su W_1 *abbiamo* $\begin{cases} \cos u = -\sin s \\ \sin u = \cos s \end{cases}$ *e il cambio di coordinate è dato da* $\begin{cases} s = u - \pi/2 \\ s = u - \pi/2 \end{cases}$.

Mentre su W_2 *abbiamo il cambio di coordinate* $\begin{cases} s = u + 3/2\pi \\ t = -v \end{cases}$.

Quindi $Im_{W_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *mentre* $Im_{W_2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.