Universitá degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002

Tutorato GE4 - 30/10/2001

Osservazione: L'equazione del piano tangente nel punto (x_0, y_0, z_0) di una superficie regolare determinata dall'equazione $f(x, y, z) = 0$, dove 0 è un valore regolare di f è

$$f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

(Esercizio 1 pag.88)

Esercizio 0.1. *Usare l'osservazione precedente per determinare i piani tangenti di $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ nei punti $(x, y, 0)$ e mostrare che sono paralleli all'asse delle z.*

Esercizio 0.2. *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione liscia e supponiamo che $1 \in \mathbb{R}$ sia un valore regolare, cosicché $\Sigma = f^{-1}(1)$ è una superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ quindi $\Sigma = \{p \in \mathbb{R}^3 \text{ t.c. } f(p) = 1\}$.*

(a) *Mostrare che per ogni curva $\alpha : I \to \Sigma$ si ha che $f \circ \alpha : I \to \mathbb{R}$ è la funzione costante $f(\alpha(t)) = 1$ e quindi la sua derivata è nulla.*

(b) *Dedurre che per ogni punto $p \in \Sigma$, il piano tangente $T_p\Sigma$ coincide (a meno di una traslazione $p \mapsto 0$) con il piano $Ker\{df_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\}$, dove $df_p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ è la derivata di f in $p \in \mathbb{R}^3$.*

(c) *Usare (b) per dimostrare che il piano tangente alla sfera S nel polo sud $s = (0, 0, -1)$ ha equazione $z = -1$.*

(d) *Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione liscia "norma al quadrato", definita da $f(p) = \|p\|^2 =< p, p >$, cioè $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.*

Mostare che $1 \in \mathbb{R}$ è un valore regolare di f e quindi che la sfera

$S = \{p \in \mathbb{R}^3 | < p, p >= 1\}$ è una superficie regolare.

Usare (b) per dimostrare che il piano tangente T_pS è il piano di $\mathbb{R}^3$ che è perpendicolare al vettore posizione $p \in \mathbb{R}^3$.

Soluzioni

Soluzione esercizio 0.1. *La superficie è la retroimmagine del valore regolare* 0 *della funzione* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *definita da* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1$, *infatti* $\nabla f(x, y, z) = (2x, 2y, -2z) = (0, 0, 0) \Longleftrightarrow (x, y, z) = (0, 0, 0)$ *che non è un valore che soddisfa l'eqazione* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.

Quindi l'equazione del piano tangente nel punto $(a, b, 0)$ *è* $a(x-a)+b(y-b) = 0$ *che è parallelo al piano per l'origine* $ax + by = 0$ *che contiene il vettore* $(0, 0, 1)$ *per ogni* $(a, b, 0)$.

Soluzione esercizio 0.2. **(a)** *Siccome* $\alpha \subset \Sigma$ *si ha che* $f \circ \alpha(t) = 1$ *per ogni* t.

(b) *Se* $v \in T_p\Sigma$ *esiste* $\alpha \subset \Sigma$ *tale che* $\alpha(0) = p$ *e* $\dot{\alpha}(0) = v$ *quindi* $df_p(v) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(0)$ *per definizione di* df_p.

Quindi per ogni $v \in T_p\Sigma$ *abbiamo* $df_p(v) = 0$, *cioè* $v \in Kerdf_p$.

Quindi $T_p\Sigma \subset Kerdf_p$, *ma essendo due spazi vettoriale di dimensione due devono coincidere.*

(c) $S = f^{-1}(1)$ *con* $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, *dove* 1 *è un punto regolare per* f. df_p *è dato dalla matrice* $(2x, 2y, 2z)$ *e quindi* $df_{(0,0,-1)} = (0, 0, -2)$, *cioè* $Ker\ df_{(0,0,-1)}$ *è il piano* $\{z = 0\}$, *quindi* $T_{(0,0,-1)}\Sigma = \{z = -1\}$

(d) *Per ogni curva* $\alpha \subset S$ *si ha che* $< \alpha(t), \alpha(t) >= 1$ *quindi* $< \dot{\alpha}(t), \alpha(t) >= 0$, *cioè* $\dot{\alpha}(t) \perp \alpha(t)$, *dove* $\alpha(t)$ *è il vettore posizione e* $\dot{\alpha}(t) \in T_pS$.