Universitá degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002

Tutorato GE4 - 23/10/2001

Esercizio 0.1. *Sia* $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ *la sfera unitaria e sia* $A : S^2 \to S^2$ *la mappa antipodale, ovvero* $A(x, y, z) = (-x, -y, -z)$. *Mostrare che* A *è un diffeomorfismo.*

Esercizio 0.2. *Sia* $S \subset \mathbb{R}^3$ *una superficie regolare e* $\pi : S \to \mathbb{R}^2$ *la mappa che associa ad ogni* $p \in S$ *la sua proiezione ortogonale su*
$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ $(= \mathbb{R}^2)$.
Stabilire se π *è differenziabile.*

Esercizio 0.3. *Sia* $S \subset \mathbb{R}^3$ *una superficie regolare e sia* $d : S \to \mathbb{R}$ *definita da* $d(p) = |p - p_0|$, *dove* $p \in S$, $p_0 \in \mathbb{R}^3$, $p_0 \notin S$; *cioè* d *è la distanza di* p *da un punto fissato* p_0 *non in* S. *Mostrare che* d *è differenziabile.*

Esercizio 0.4. *Dimostrare che l'iperboloide iperbolico* Σ *(o iperboloide a una falda)*

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

è una superficie di rotazione connessa e tracciarne il disegno.

Esercizio 0.5. *Mostrare che le rotazioni di una superficie di rivoluzione* S *intorno al suo asse sono diffeomorfismi di* S.

Soluzioni

Osservazione importante:

Sia $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie regolare;

$f : S \to \mathbb{R}$ è una funzione C^∞ in $p \in S \iff f$ si può estendere ad una funzione C^∞ definita in un intorno V di p in $\mathbb{R}^3$, con $p \in V \subset \mathbb{R}^3$.

(vedi anche example 3 pag.74)

Soluzione esercizio 0.1. *A è la restrizione di un'applicazione C^∞ da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ quindi A è C^∞ su ogni superficie regolare $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$.*

Inoltre $A^2 = id$ quindi esiste $A^{-1} = A$ ed è C^∞ anch'essa.

Soluzione esercizio 0.2. *Come nell'esercizio precedente π è la restrizione di un'applicazione C^∞ da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ quindi π è C^∞ su S.*

Soluzione esercizio 0.3. *Dopo una traslazione di $\mathbb{R}^3$, che è C^∞, possiamo assumere che $p_0 = (0,0,0)$ e quindi $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ che è C^∞ in $\mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$.*

Quindi, essendo $p_0 \notin \Sigma$, $d : \Sigma \to \mathbb{R}$ è C^∞.

Soluzione esercizio 0.4. *Bisogna trovare una curva $C = \begin{cases} x = f(v) \\ z = g(v) \end{cases}$ nel piano xz in modo tale che $x : (0, 2\pi) \times I \to S$, definita da x(u,v)=(f(v)cosu,f(v)sinu,g(v)), sia una parametrizzazione di S.*

Si puó prendere ad esempio

$C = \begin{cases} x = \sqrt{1+v^2} \\ z = v \end{cases}$ *(un'altra scelta poteva essere $C = \begin{cases} x = cosh(v) \\ z = sinh(v) \end{cases}$)*

di modo che $x^2 - z^2 = 1 + v^2 - v^2 = 1$ ($x^2 - z^2 = cosh^2 v - sinh^2 v = 1$).

Quindi Σ è di rotazione.

C è il ramo d'iperbole $\begin{cases} x^2 - z^2 = 1 \\ x > 0 \end{cases}$ e quindi è connessa.

Per dimostrare che $x : U \to \Sigma$ è una parametrizzazione dobbiamo far vedere che soddisfa le condizioni 1,2,3 pag.52:

(1) $x(u,v) \mapsto (\sqrt{1+v^2}cosu, \sqrt{1+v^2}sinu, v)$ è C^∞ perché $\sqrt{1+v^2} \in C^\infty$, $cosu, sinu \in C^\infty$.

(3) La derivata ha rango 2, infatti

$J = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}}cosu & -\sqrt{1+v^2}sinu \\ \frac{-1}{\sqrt{1+v^2}}sinu & -\sqrt{1+v^2}cosu \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *ha rango 2 $\Longleftrightarrow$ almeno uno dei minori è non nullo $\Longleftrightarrow$ la somma dei quadrati dei minori è diversa da zero $\Longleftrightarrow$ $v^2(cos^2u + sin^2u)^2 + (1+v^2)(sin^2u + cos^2u) = 1 + 2v^2 \neq 0$ che è verificato per ogni $(u,v) \in (0,2\pi) \times I$*

(2) Questa condizione discende dalla prop.4 pag. 64 per usare la quale basterà mostrare che Σ è una superficie regolare e che x è iniettiva.

Sia $x(u_1,v_1) = x(u_2,v_2)$ allora $v_1 = v_2$ perché hanno la stessa terza coordinata, inoltre $\begin{cases} cosu_1 = cosu_2 \\ sinu_1 = sinu_2 \end{cases}$ quindi $u_1 = u_2$, essendo $u_1, u_2 \in (0,2\pi)$. Quindi x è iniettiva.

Inoltre è una superficie regolare, infatti considerando $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da $(x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 - z$ si ha che $\Sigma = f^{-1}(1)$; inoltre

$gradf = (f_x, f_y, f_z) = (2x, 2y, -2z)$ quindi l'unico punto critico è l'origine $0 \in \mathbb{R}^3$ ovvero l'unico valore critico è $0 \in \mathbb{R}$.

Soluzione esercizio 0.5. *Sia z l'asse di S. Una rotazione $A_\theta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ è l'applicazione lineare definita dalla matrice $A_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ed è quindi differenziabile.*

Dall'Esempio 3 pag. 74 segue (essendo $A_\theta(S) = S$) che A_θ è differenziabile come mappa da S in S.

Notando che $A_\theta \circ A_{-\theta} = id$ si può concludere che A è un diffeomorfismo.