Universitá degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002

Tutorato GE4 - 16/10/2001

Esercizio 0.1. *Dimostrare che il paraboloide iperbolico Σ (superficie a sella)*

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y^2 = z\}$$

è una superficie regolare.

Verificare che l'intersezione con i piani $z =$cost. sono iperboli e discutere il caso $z = 0$.

Trovare il piano tangente a Σ nell'origine: $T_0\Sigma$.

Verificare che le intersezioni di Σ con i piani $x =$cost. o $y =$cost. sono parabole.

Tracciare il disegno di Σ.

Esercizio 0.2. *Sia Σ una superficie regolare; un sottoinsieme $V \subseteq \Sigma$ è una superficie regolare se e solo se V è aperto in Σ.*

Esercizio 0.3. *Gli insiemi*

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0 \wedge x^2 + y^2 < 1\}$$

sono superfici regolari?

Esercizio 0.4. *Mostrare che il cono $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2\}$ non è una superficie regolare.*

Esercizio 0.5. *Sia $f(x,y,z) = z^2$, provare che 0 non è un valore regolare di f,ma nonostante ció $f^{-1}(0)$ è una superficie regolare.*

Esercizio 0.6. *Sia* $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\}$ *(un piano) e sia* $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *data da*

$$\mathbf{x}(u, v) = (u + v, u + v, uv)$$

dove $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > v\}$*. Chiaramente* $\mathbf{x}(U) \subset P$*.*
$\mathbf{x}$ *è una parametrizzazione di* P*?*

Esercizio 0.7. *Mostrare che l'inversa della proiezione stereografica* $\pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to S^2$

$$\pi^{-1} = \begin{cases} x = \frac{4u}{u^2+v^2+4} \\ y = \frac{4v}{u^2+v^2+4} \\ z = \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4} \end{cases}$$

è una carta locale per la sfera.

Soluzioni

Soluzione esercizio 0.1. *Σ è una superficie regolare perché è il grafico di una funzione differenziabile. (vedi Prop. 1, pag. 58).*

Ponendo $z = k$ si ottengono le iperboli $x^2 - y^2 = k$ che degenerano in due rette nel caso $k = 0$ ($(x-y)(x+y) = 0$).

Consideriamo la parametrizzazione $\mathbf{x} : (x, y) \mapsto (x, y, x^2 - y^2)$, con derivata

$$dx_0 = J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi il piano tangente, che è l'immagine di $dx_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, è il piano $z = 0$. Ponendo $x = k$ si ottiene la parabola $z = -y^2 + k^2$ nel piano $x = k$, analogamente per la y.

Soluzione esercizio 0.2. *Una carta locale è un diffeomorfismo con un aperto di $\mathbb{R}^2$.*

V è una superficie regolare $\Leftrightarrow$ ogni $p \in V$ ha un intorno diffeomorfo a un apero di $\mathbb{R}^2$ (questo diffeomorfismo è dato dalla restrizione di una carta locale su Σ) $\Leftrightarrow$ $V \subset \Sigma$ è aperto.

Soluzione esercizio 0.3. *Usare l'esercizio precedente.*

Soluzione esercizio 0.4. *Ogni intorno dell'origine non è omeomorfo a un disco ad esempio perchè il primo si puó disconnettere togliendo un punto, il secondo no.*

Soluzione esercizio 0.5. *Il gradiente di f è $(0, 0, 2z)$ che calcolato in $(0, 0, 0)$ è il vettore nullo, quindi 0 non è un valore regolare, ma $f^{-1}(0)$ è il piano $z = 0$ e quindi è una superficie regolare.*

Soluzione esercizio 0.6. *Dato che sappiamo che P è una superficie e che* $\mathbf{x}$ *è iniettiva, possiamo applicare la Prop.4 pag.64, basterá quindi verificare che* $\mathbf{x}$ *è differenziabile e che il differenziale* $d\mathbf{x}$ *è iniettivo.*

$\mathbf{x}$ *è differenziabile perchè lo è ognuna delle sue componenti.*

$d\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ v & u \end{pmatrix}$ *ha rango 2 perchè $u > v$ in P e quindi è iniettiva.*