Universitá degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002

Tutorato GE4 - 09/10/2001

Esercizio 0.1. *Sia K il vettore $(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$ e sia $\alpha(t) : I \to \mathbb{R}^3$ una curva (diversa da un punto).*

Dimostrare che $\alpha(t)$ è contenuta in un piano affine orizzontale π (cioè $z = z_0$) se e solo se il prodotto scalare $\alpha(t) \cdot k$ è costante (cioè non dipende da t).

Esercizio 0.2. *Consideriamo la mappa*

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, 0, e^{-1/t^2}), & t > 0 \\ (t, e^{-1/t^2}, 0), & t < 0 \\ (0,0,0), & t = 0 \end{cases}$$

a. *Provare che α è una curva differenziabile.*

b. *Provare che α è regolare per ogni t e che la curvatura $k(t) \neq 0$ per $t \neq 0$, $t \neq \pm\sqrt{2/3}$ e $k(0) = 0$.*

c. *Mostrare che il limite dei piani osculatori per $t \to 0$, $t > 0$, è il piano $y = 0$, mentre il limite dei piani osculatori per $t \to 0$, $t < 0$, è il piano $z = 0$ (questo implica che il vettore normale è discontinuo in $t = 0$ e mostra perchè escludiamo punti dove $k = 0$).*

d. *Mostrare che τ puó essere definita in maniera tale che $\tau \equiv 0$, anche se α non è una curva piana.*

Esercizio 0.3. *Verificare quali tra le seguenti basi sono positive:*

a. *La base $\{(1,3),(4,2)\}$ in $\mathbb{R}^2$.*

b. *La base $\{(1,3,5),(2,3,7),(4,8,3)\}$ in $\mathbb{R}^3$.*

Esercizio 0.4. *Dimostrare che il prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$ non è associativo.*

Soluzioni

Soluzione esercizio 0.1. **Soluzione esercizio 0.2.**

$$\alpha(t) = (sin(t), cos(t))$$

Soluzione esercizio 0.3. *Se* $\alpha''(t) \equiv 0$ *allora* $\alpha'(t)$ *è un vettore costante* $v \in \Re^3$ *e quindi* $\alpha(t) = v\,t + w$ *che è l'equazione della retta per il punto* w *nella direzione* v*, infatti se* $v = (x, y, z)$ *e* $w = (a, b, c)$ *allora* $\alpha(t) = (a + x\,t, b + y\,t, c + z\,t)$.

Soluzione esercizio 0.4. $|\alpha| = costante \Leftrightarrow costante = |\alpha|^2 = \alpha \cdot \alpha$ *quindi* $0 = \frac{d}{dt}[\alpha \cdot \alpha] = \dot{\alpha} \cdot \alpha + \alpha \cdot \dot{\alpha} = 2\,\dot{\alpha} \cdot \alpha$*, cioè* $\dot{\alpha} \cdot \alpha = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = costante$.

Soluzione esercizio 0.5. *Sia* $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$*, si ha* $v \cdot \dot{\alpha} = a\,\dot{x} + b\,\dot{y} + c\,\dot{z}$.
$\int_0^1 v \cdot \dot{\alpha} dt = a \int_0^1 \dot{x} dt + b \int_0^1 \dot{y} dt + c \int_0^1 \dot{z} dt = a\,(x(1) - x(0)) + b\,(y(1) - y(0)) + c\,(z(1) - z(0)) = v \cdot (\alpha(1) - \alpha(0))$