Universitá degli Studi di Roma Tre

Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002

Tutorato GE4 - 02/10/2001

Esercizio 0.1. *Siano*

$$u(t) = (x(t), y(t), z(t))$$
$$v(t) = (a(t), b(t), c(t))$$

due vettori in $\Re^3$ *che variano al variare del tempo* $t \in I$ *in maniera liscia (p. es. vettori tangenti a due curve). Dimostrare che il loro prodotto scalare* $u(t) \cdot v(t) : I \to \Re$ *è una funzione liscia. Dimostrare inoltre che per la derivata del prodotto scalare vale la seguente regola di Leibniz*

$$\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = \dot{u}(t) \cdot v(t) + u(t) \cdot \dot{v}(t) : I \to \Re$$

Esercizio 0.2. *Trovare una curva parametrizzata* $\alpha(t)$ *tale che*

1) la sua traccia sia il cerchio $x^2 + y^2 = 1$

2) α *percorra il cerchio in senso orario*

3) $\alpha(0) = (0, 1)$

Esercizio 0.3. *Una curva parametrizzata* $\alpha(t)$ *ha la proprietà che la sua derivata seconda* $\alpha''(t)$ *è identicamente nulla. Cosa si può dire sulla curva* α*?*

Esercizio 0.4. *Sia* $\alpha : I \to \Re^3$ *una curva parametrizzata, con* $\alpha'(t) \neq 0 \; \forall \, t \in I$*. Mostrare che la* $|\alpha(t)|$ *è una costante non nulla se e solo se* $\alpha(t)$ *è ortogonale ad* $\alpha'(t) \; \forall \, t \in I$*.*

Esercizio 0.5. *Sia* $v = (a, b, c)$ *un vettore fisso e sia* $\alpha : I \to \Re^3$ *una curva liscia, dove* $I = [0, 1]$*. Usare il Primo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale per dimostrare che*

$$\int_0^1 v \cdot \dot{\alpha}(t) dt = v \cdot (\alpha(1) - \alpha(0)).$$

Soluzioni

Soluzione esercizio 0.1. *Ricordando che* $u(t) \cdot v(t) = a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t)z(t)$ *si ha che è una funzione liscia perché somma e prodotto di funzioni liscie.*
Inoltre $\frac{d}{dt}(u(t) \cdot v(t)) = \frac{d}{dt}[a(t)x(t) + b(t)y(t) + c(t)z(t)] = \frac{d}{dt}[a(t)x(t)] + \frac{d}{dt}[b(t)y(t)] + \frac{d}{dt}[c(t)z(t)] = \dot{a}(t)x(t) + a(t)\dot{x}(t) + \dot{b}(t)y(t) + b(t)\dot{y}(t) + \dot{c}(t)z(t) + c(t)\dot{z}(t) = (\dot{a}x + \dot{b}y + \dot{c}z) + (a\dot{x} + b\dot{y} + c\dot{y}) = \dot{v} \cdot u + v \cdot \dot{u}$.

Soluzione esercizio 0.2.

$$\alpha(t) = (sin(t), cos(t))$$

Soluzione esercizio 0.3. *Se* $\alpha''(t) \equiv 0$ *allora* $\alpha'(t)$ *è un vettore costante* $v \in \Re^3$ *e quindi* $\alpha(t) = v\,t + w$ *che è l'equazione della retta per il punto* w *nella direzione* v*, infatti se* $v = (x, y, z)$ *e* $w = (a, b, c)$ *allora* $\alpha(t) = (a + x\,t, b + y\,t, c + z\,t)$.

Soluzione esercizio 0.4. $|\alpha| = costante \Leftrightarrow costante = |\alpha|^2 = \alpha \cdot \alpha$ *quindi* $0 = \frac{d}{dt}[\alpha \cdot \alpha] = \dot{\alpha} \cdot \alpha + \alpha \cdot \dot{\alpha} = 2\,\dot{\alpha} \cdot \alpha$, *cioè* $\dot{\alpha} \cdot \alpha = 0 \Leftrightarrow |\alpha| = costante$.

Soluzione esercizio 0.5. *Sia* $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, *si ha* $v \cdot \dot{\alpha} = a\,\dot{x} + b\,\dot{y} + c\,\dot{z}$.
$\int_0^1 v \cdot \dot{\alpha}\,dt = a \int_0^1 \dot{x}\,dt + b \int_0^1 \dot{y}\,dt + c \int_0^1 \dot{z}\,dt = a\,(x(1) - x(0)) + b\,(y(1) - y(0)) + c\,(z(1) - z(0)) = v \cdot (\alpha(1) - \alpha(0))$