Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: A. Pesce, M. Nesci

Tutorato del 8/5/2002

9.1 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Verificare che $(X, \mathcal{T})$ è connesso se e solo se ogni applicazione continua da $(X, \mathcal{T})$ ad uno spazio topologico discreto $(Y, \mathcal{P}(Y))$ é costante.

9.2 Sia X uno spazio topologico compatto e sia Y uno spazio topologico connesso e $T2$. Dimostrare che ogni applicazione continua e aperta

$$f : X \to Y$$

è necessariamente suriettiva.

9.3 Verificare che gli insiemi $GL(n, \mathbb{R})$ delle matrici di ordine n invertibili e l'insieme $O(n, \mathbb{R})$ delle matrici ortogonali sono sconnessi in $(\mathcal{M}(n, \mathbb{R}), \mathcal{T}_e)$ (definito in esercizio **8.4**).

9.4 Sia $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$ un sottoinsieme di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$.

(i) Verificare che E è connesso.

(ii) Verificare che $E - \{(0, 0)\}$ ha 4 componenti connesse.

(iii) Dimostrare che $(E, \mathcal{T}_e) \not\cong (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ (E non è omeomorfo alla retta euclidea).

9.5 Dire quali dei seguenti sottoinsiemi di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$ sono sconnessi:
$C_1 := \mathbb{R}^2 - \{(x, 0) : x \neq 0\}$;
$C_2 := \mathbb{R}^2 - \{(q, 0) : q \in \mathbb{Q}\}$;
$C_3 := D_1(1, 0) \cup D_1(-1, 0)$;
$C_4 := \overline{C_3}$.

9.6 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e sia C un sottoinsieme non vuoto di X.

(i) Verificare che: C aperto, chiuso e connesso $\Rightarrow$ C è componente connessa di $(X, \mathcal{T})$.

(ii) Determinare un esempio di componente connessa non aperta.

9.7 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico e sia ρ una relaziuone d'equivalenza su X. Sia $(X/\rho, \mathcal{T}_\rho)$ lo spazio topologico quoziente di X rispettto alla relazione ρ. Dimostrare che se $(X/\rho, \mathcal{T}_\rho)$ è connesso e se ogni ρ-classe di equivalenza è un sottoinsieme connesso di X, allora $(X, \mathcal{T})$ è connesso.