Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: A. Pesce, M. Nesci

Tutorato del 20/3/2002

5.1 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico separabile. Se U è un aperto non vuoto di $\mathcal{T}$, verificare che il sottospazio topologico $(U, \mathcal{T}_U)$ è separabile.

5.2 Sia $S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x, y < 1\}$. Trovare tre sottospazi $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})$ di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$ che contengono S e tali che S in $(X_i, \mathcal{T}_{X_i})$ sia rispettivamente :

(i) aperto e chiuso;

(ii) chiuso ma non aperto;

(iii) aperto ma non chiuso.

5.3 Siano S_1, S_2 sottoinsiemi degli spazi topologici $(X_1, \mathcal{T}_1)$ e $(X_2, \mathcal{T}_2)$. Dimostrare che nel prodotto topologico $(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2)$ si ha:

(i) $\overline{S_1 \times S_2} = \overline{S_1} \times \overline{S_2}$;

(ii) $\mathrm{Int}(S_1 \times S_2) = \mathrm{Int}(S_1) \times \mathrm{Int}(S_2)$;

(ii) $\mathrm{Fr}(S_1 \times S_2) = (\mathrm{Fr}(S_1) \times \overline{S_2}) \cup (\overline{S_1} \times \mathrm{Fr}(S_2))$.

5.4 Sia X un insieme infinito ed Y un insieme avente almeno due elementi. Siano $\mathcal{T}_{cof_X}$, $\mathcal{T}_{cof_Y}$, $\mathcal{T}_{cof_{X \times Y}}$ le topologie cofinite su X, Y ed $X \times Y$. Sia inoltre $\mathcal{T}$ la topologia prodotto di $(X, \mathcal{T}_{cof_X})$ per $(Y, \mathcal{T}_{cof_Y})$. Verificare che $\mathcal{T}_{cof_{X \times Y}} \subsetneq \mathcal{T}$ in $X \times Y$.

5.5 Siano $(X_1, \mathcal{T}_1)$, $(X_2, \mathcal{T}_2)$ spazi topologici non vuoti. Dimostrare che:

$$(X_1 \times X_2, \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2) \text{ è separabile} \iff (X_1, \mathcal{T}_1) \text{ e } (X_2, \mathcal{T}_2) \text{ sono separabili.}$$

5.6 Sia $(\mathbb{R}^2, j_s \times j_s)$ lo spazio topologico prodotto di $(\mathbb{R}, j_s)$ per se stesso. Sia $F : (\mathbb{R}^2, j_s \times j_s) \to (\mathbb{R}, j_s)$ l'applicazione cosí definita:

$$F(x, y) = x + y, \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Verificare che F é continua.

5.7 Sia $(\mathbb{C}, \mathcal{T}_e)$ il piano complesso (esercizio **4.1**), e sia $\mathbf{S}^1 := \{a \in \mathbb{C} : |a| = 1\}$.
Si consideri $(S^1 - \{1\}, \mathcal{T}_e)$ come sottospazio topologico di $(\mathbb{C}, \mathcal{T}_e)$.
Dimostrare che

$$(S^1 - \{1\}, \mathcal{T}_e) \cong ([0, 1), \mathcal{T}_e),$$

dove $([0, 1), \mathcal{T}_e)$ è l'intervallo $[0, 1)$ di $\mathbb{R}$ con la topologia indotta dalla retta euclidea.