Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002

Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: A. Pesce, M. Nesci

Tutorato del 4/3/2002

2.1 Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico discreto. Si consideri $\mathcal{A} = \{\{x\}\}_{x \in X}$ la famiglia di tutti i sottoinsiemi puntiformi di X.
Sia $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$, dimostrare che

$$\mathcal{B} \text{ \'e base per } \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{B}.$$

2.2 Sia $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ la retta euclidea. Dimostrare che

$$\mathcal{B}_1 := \{(a,b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

$$\mathcal{B}_2 := \{(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n}) : a \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

$$\mathcal{B}_3 := \{(q,r) : q, r \in \mathbb{Q},\ q < r\}$$

sono basi di $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$.
Dimostrare inoltre che l'insieme dei dischi euclidei di $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{D} := \{D_h(\mathbf{q}) : q_1, ..., q_n, h \in \mathbb{Q}, h > 0\}$$

é una base per $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$.

2.3 Sia $\mathcal{P} = \{P_i\}_{i \in I}$ una partizione dell'insieme X. Verificare che $\mathcal{P}$ e' una base di una topologia $\mathcal{T}$ su X.

2.4 Sia $\mathcal{B} := \{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, b) : b \in \mathbb{R}\}$. Esiste una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ che ha $\mathcal{B}$ come base? Cosa si puo' dire di $\mathcal{B}$?

2.5 Sia $n \geq 2$ e sia $S(i; a, b) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a < x_i < b\}$ la striscia ortogonale all'asse i-esimo di $\mathbb{R}^n$ ad estremi $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.

(i) Verificare che $S(i; a, b) \in \mathcal{T}_e$ (topologia euclidea di $\mathbb{R}^n$).

(ii) Sia $\mathcal{S}$ l'insieme di tutte le strisce di $\mathbb{R}^n$, verificare che la famiglia $\mathcal{B}_{\mathcal{S}}$ costituita da tutte le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{S}$ e' una base per la topologia euclidea $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$.

2.6 Sia j_d la topologia su $\mathbb{R}$ che ha come base la famiglia

$$\mathcal{B} := \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}.$$

Sia inoltre

$$\mathcal{T}_{cof} := \{A \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} - A \text{ \'e } finito\} \cup \{\emptyset\}$$

la topologia cofinita su $\mathbb{R}$.
Dimostrare che entrambi gli spazi $(\mathbb{R}, j_d)$ e $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof})$ non hanno una base numerabile di aperti.

2.7 Sia

$$\mathcal{B} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{Q},\ a < b\}.$$

(i) Verificare che $\mathcal{B}$ e' una base di una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$.

(ii) Verificare che $\mathcal{T}_e \lneqq \mathcal{T} \lneqq j_s$, dove $\mathcal{T}_e$ e' la topologia euclidea e dove j_s e' la topologia su $\mathbb{R}$ che ha come base gli intervalli limitati aperti a sinistra e chiusi a destra.

2.8 Sia $\mathcal{S} := \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, a], a \in \mathbb{R}\}$.

(i) Verificare che $\mathcal{S}$ non e' una topologia su $\mathbb{R}$.

(ii) Determinare la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ generata da $\mathcal{S}$ (l'intersezione di tutte le topologie di $\mathbb{R}$ che contengono $\mathcal{S}$).

(iii) Confrontare la topologia $\mathcal{T}(\mathcal{S})$ con la topologia i_s su $\mathbb{R}$, dove $i_s = \{\mathbb{R}, \emptyset\} \cup \{(-\infty, a), a \in \mathbb{R}\}$.