Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002

Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: A. Pesce, M. Nesci

Tutorato del 22/5/2002

11.1 Sia X uno spazio topologico e sia $\varphi : \mathbf{I} \to \mathbf{I}$ un'applicazione continua tale che $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = 0$. Dimostrare che per ogni arco $f : \mathbf{I} \to X$ si ha $f^{-1} \sim f \circ \varphi$ (dove $f^{-1}(s) := f(1-s)$, $s \in \mathbf{I}$).

11.2 Sia X uno spazio topologico e siano $x_0, x_1 \in X$ e $\alpha, \beta : \mathbf{I} \to X$ due archi tali che $\alpha(0) = x_0 = \beta(0)$, $\alpha(1) = x_1 = \beta(1)$. Dimostrare che se $\alpha \sim \beta$ allora $\pi_\alpha = \pi_\beta$ (dove $\pi_\alpha : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$, definita da: $\pi_\alpha([f]) = [\alpha^{-1} * f * \alpha]$.

11.3 Dimostrare che un sottospazio convesso V di $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$ è semplicemente connesso (connesso per archi ed il gruppo fondamentale è quello banale).

11.4 Un sottoinsieme A di $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$ si dice *stellato* se esiste un punto $a_0 \in A$ tale che per ogni altro punto $a \in A$ il segmento di estremi a, a_0 è tutto contenuto in A.

(i) Trovare un insieme stellato che non sia convesso.

(ii) Dimostrare che se A è stellato, A è semplicemente connesso.

11.5 Si consideri l'insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$ e sia $\mathcal{T}_e$ la topologia euclidea su $\mathbb{C}$ (la topologia indotta dalla norma su $\mathbb{C}$). Si consideri lo spazio topologico prodotto $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$. Si considerino le seguenti due rette in $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$:

$$r_1 := \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : y = 0\}$$
$$r_2 := \{(x, y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} : x = 0\}.$$

Sia $T := r_1 \cup r_2$.

(i) Determinare $\pi_1(T, (0, 0))$ (il gruppo fondamentale di T con punto base $(0, 0)$).

(ii) Determinare $\pi_1(T, (1, 0))$.

(iii) Lo spazio T è semplicemente connesso?