Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica
Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002
Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: A. Pesce, M. Nesci

Tutorato del 15/5/2002

10.1 Sia $\{C_t\}_{t\in I}$ una famiglia di sottoinsiemi connessi per archi di uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$. Verificare che se $\cap_{t\in I} C_t \neq \emptyset$, allora $\cup_{t\in I} C_t$ è connesso per archi.

10.2 Verificare con un esempio che se E è un sottoinsieme connesso per archi di uno spazio topologico $(X, \mathcal{T})$, la sua chiusura $\overline{E}$ non è necessariamente connnessa per archi.

10.3 Dimostrare le seguneti affermanzioni:

(i) Ogni spazio topologico banale $(X, \mathcal{I}_X)$ è connesso per archi.

(ii) Ogni sottoinsieme convesso di $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$ è connesso per archi.

(iii) Se $(X, \mathcal{T})$ è connesso per archi e $\mathcal{T}' \leq \mathcal{T}$, anche $(X, \mathcal{T}')$ è connesso per archi.

(iv) Se X ha cardinalitá ≥ 2, $(X, \mathcal{P}(X))$ non è connesso per archi.

10.4 Sai $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico.

(i) Verificare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

- (i1) ogni componente connessa per archi è aperta;
- (i2) ogni punto $x \in X$ ha un intorno connesso per archi.

(ii) Dedurre da (i) che $(X, \mathcal{T})$ è connesso per archi $\Longleftrightarrow$ $(X, \mathcal{T})$ è connesso e vale la condizione $(i2)$.

10.5 Dimostrare che ogni aperto connesso di $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T}_e)$ è connesso per archi. (*Sugg.* Utilizzare il risultato dell'esercizio **10.4**).