**Universitá degli Studi di Roma Tre - Dipartimento di Matematica**
**Corso di GE3 del Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/2002**
**Docente: Prof. M. Pontecorvo - Esercitatore: Dott. L. Di Marco - Tutori: A. Pesce, M. Nesci**

**Tutorato del 27/2/2002**

**1.1** Dimostrare che per ogni spazio metrico $X$ con distanza $d$ e per ogni $r > 0$, ponendo $d_r(x, x') = rd(x, x')$, si ottiene una distanza.

**1.2** Sia $d$ una metrica su un insieme finito $X$. Dimostrare che $d$ é topologicamente equivalente alla metrica discreta su $X$.

**1.3** Dimostrare che ognuna delle seguenti é una distanza in $\mathbb{R}^n$:

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|;$$

$$d'(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i'|;$$

$$d''(\mathbf{x}, \mathbf{x}') := \max_i \{|x_i - x_i'|\}.$$

**1.4** Dimostrare che su $\mathbb{R}^n$ le tre distanze $d, d', d''$ introdotte nell'esercizio precedente sono topologicamente equivalenti.

**1.5** Sia $(X, d)$ spazio metrico e sia $U \subset X$. Verificare che le seguenti condizioni sono equivalenti:

(i) $U$ é aperto;

(ii) $\forall x \in U$, esiste un disco $D_\varepsilon(x)$ tale che $D_\varepsilon(x) \subset U$;

(iii) $\forall x \in U$, esiste un aperto $V_x$ tale che $x \in V_x \subset U$.

**1.6** Trovare tutte le topologie su un insieme $X = \{a, b, c\}$ costituito da tre elementi.

**1.7** Sia $\{\mathcal{T}_i\}_{i \in I}$ una famiglia di topologie su di un insieme $X$. Dimostrare che $\bigcap_{i \in I} \mathcal{T}_i$ é una topologia su $X$.

**1.8** Si considerino su $\mathbb{R}$ le seguenti topologie:

$$\mathcal{T}_{cof} := \{A \subset \mathbb{R} : \mathbb{R} - A \textit{ é finito}\} \cup \{\emptyset\};$$

$$j_d := \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in A, \exists\, a, b \in \mathbb{R} \textit{ con } a \lneq b \textit{ tale che } x \in [a, b) \subset A\};$$

$$j_{ds} := \{A \subset \mathbb{R} : \forall x \in A, \exists\, a, b \in \mathbb{R} \textit{ con } a \leq b \textit{ tale che } x \in [a, b] \subset A\}.$$

Si consideri inoltre la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$ su $\mathbb{R}$. Dimostrare che vale la seguente relazione per le quattro topologie su $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{T}_{cof} \lneq \mathcal{T}_e \lneq j_d \lneq j_{ds}.$$