Universitá degli Studi di Roma Tre
Corso di GE3, a.a. 2001/2002
COMPITO (08/04/2002)

Istruzioni. Scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intende consegnare. Scrivere solamente sui fogli forniti. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
NON PARLARE pena il ritiro immediato del compito.
Punteggio totale 100 punti.

1 Sia $X := [-1,1] \subset \mathbb{R}$ (intervallo chiuso di $\mathbb{R}$ di estremi $-1,1$) e si consideri la famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{C} := \{F \subset [-1,1] : \ 0 \in F\} \cup \{\emptyset\}$.

(i) **[10 pt]** Verificare se esiste una topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ su X che ha $\mathcal{C}$ come famiglia di chiusi.

(ii) **[15 pt]** Dire se la topologia $\mathcal{T}_{\mathcal{C}}$ è piú fine, meno fine o non confrontabile rispetto alla topologia $\mathcal{T}_e$ (topologia euclidea indotta su $[-1,1]$). Giustificare la risposta.

2 Sia $A := (0,1) \cup \mathbb{N}^*$ sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

(i) **[12 pt]** Determinare $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Est}(A)$, $\mathrm{Fr}(A)$, $\overline{A}$, $D(A)$ e l'insieme dei punti isolati di A rispetto alla topologia euclidea $\mathcal{T}_e$ di $\mathbb{R}$.

(ii) **[18 pt]** Determinare $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Est}(A)$, $\mathrm{Fr}(A)$, $\overline{A}$, $D(A)$ e l'insieme dei punti isolati di A rispetto alla topologia j_d di $\mathbb{R}$, dove j_d è la topologia che ha per base la famiglia

$$\mathcal{B} := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}, \ a < b\}.$$

3 Sia $X \subset \mathbb{R}^2$ il sottoinsieme:

$$X := (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \mathbb{R}).$$

Si consideri l'applicazione $g : \mathbb{R}^2 \to X$ cosí definita:

$$g(x,y) = \begin{cases} (x,0) & \text{se } x \neq 0 \\ (0,y) & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Si consideri la topologia euclidea $\mathcal{T}_e$ su $\mathbb{R}^2$ e si consideri su X la topologia quoziente $\mathcal{T}_q$ indotta da g ($A \subset X$ è aperto se e solo se $g^{-1}(A)$ è un aperto di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$).

(i) Descrivere un intorno aperto dei seguenti punti di X rispetto alla topologia quoziente $\mathcal{T}_q$ su X:

(a) **[5 pt]** punto $(1,0)$;

(b) **[5 pt]** punto $(0,-1)$;

(c) **[5 pt]** punto $(0,1)$.

(ii) **[5 pt]** Si consideri la successione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ di $\mathbb{R}^2$:

$$x_n = (1/n, 1).$$

Trovare il limite della succesione $\{x_n\}_{n\geq 1}$ considerando la topologia euclidea in $\mathbb{R}^2$ (il limite nello spazio $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$).

(iii) **[10 pt]** Si consideri la successione $\{y_n\}_{n\geq 1}$, con $y_n = g(x_n)$, cioé

$$y_n = (1/n, 0).$$

Dire se la successione $\{y_n\}_{n\geq 1}$ è convergente nello spazio quoziente $(X, \mathcal{T}_q)$, e in caso affermativo trovare uno o piú limiti.

(iv) **[15 pt]** Lo spazio topologico $(X, \mathcal{T}_q)$ è di Hausdorff (T_2)? Giustificare la risposta.