Universitá degli Studi di Roma Tre
Corso di GE3, a.a. 2001/2002
COMPITO (20/06/2002)

Istruzioni. Scrivere nome, cognome, numero di matricola e firma su ogni foglio che si intende consegnare. Scrivere solamente sui fogli forniti. Non sono ammessi libri, quaderni, altri fogli né calcolatrici.
NON PARLARE pena il ritiro immediato del compito.
Punteggio totale 100 punti.

1 Sia $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - y)(x + y) = 0\}$ un sottoinsieme di $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T}_e)$.

(i) **[5 pt]** Verificare che E è connesso.

(ii) **[10 pt]** Verificare che $E - \{(0, 0)\}$ ha 4 componenti connesse.

(iii) **[10 pt]** Dimostrare che $(E, \mathcal{T}_e) \not\cong (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ (E non è omeomorfo alla retta euclidea).

2 **[25 pt]** Dato X spazio compatto e Y spazio $T2$ (Hausdorff). Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e biiettiva.
Dimostrare che f è un omeomorfismo.

3 Sia $\mathcal{C}_{\mathcal{T}} := \{F \subset \mathbb{R} \,:\, |F| \leq |\mathbb{N}| \text{ o } 2 \in F\}$.

(i) **[5 pt]** Verificare che esiste una topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$ che ha $\mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ come famiglia di chiusi.

(ii) **[5 pt]** Verificare che l'insieme $\{r\}$ è un aperto di $\mathcal{T}$, $\forall r \in \mathbb{R} - \{2\}$.

(iii) **[10 pt]** Sia $A := [0, 1) \subset \mathbb{R}$. Determinare $\mathrm{Int}(A)$, $\mathrm{Est}(A)$, $\mathrm{Fr}(A)$, $\overline{A}$, $D(A)$ e l'insieme dei punti isolati di A rispetto alla topologia $\mathcal{T}$ su $\mathbb{R}$.

(iv) **[5 pt]** Sia $\{x_n\}_{n \geq 1}$ la successione in $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ cosí definita:

$$x_n = 2 + \frac{1}{n}.$$

Determinare il carattere della successione.

4 In $\mathbb{R}$ si considerino le topologie i_s, j_d. Sia $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ lo spazio prodotto di $(\mathbb{R}, i_s)$ per $(\mathbb{R}, j_d)$.

(i) **[5 pt]** Verificare che l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x < 0 \text{ e } y \in [0, 1)\}$ è aperto.

(ii) **[10 pt]** Verificare che su $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{T}$ non è confrontabile con $\mathcal{T}_e$ (topologia euclidea).

(iii) **[10 pt]** Sia $q : (\mathbb{R}^2, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_e)$ una funzione cosí definita:

$$q(x, y) = y \;\; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Dire se q è continua.
Dire inoltre se q è aperta e chiusa.