III Tutorato di GE2 A.A. 2001-2002

19 novembre 2001

1. Dire se le seguenti coppie di matrici sono congruenti:

   $$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Trovare, con il metodo di 'Gauss-Jordan simmetrico', una matrice diagonale congruente ad E.

2. Per le seguenti forme quadratiche $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ costruire la matrice simmetrica corrispondente. Diagonalizzare tale matrice con il metodo di 'Gauss-Jordan simmetrico'.

   (a) $q(\mathbf{x}) = 5x^2 + 3y^2 + xz$

   (b) $q(\mathbf{x}) = -x^2 - 4xy + 3y^2 + 2z^2$

   si intende $\mathbf{x} = (x, y, z)$.

3. Costruire le matrici simmetriche corrispondenti alle seguenti forme quadratiche $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

   (a) $q(\mathbf{x}) = 6x_1x_2$

   (b) $q(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$

   (c) $q(\mathbf{x}) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$

   (d) $q(\mathbf{x}) = -x_1^2 + 2x_1x_2 - 3x_2^2$

   Sia B una di queste matrici simmetriche; per ciascuna di esse si consideri la forma bilineare simmetrica polare

   $$\phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad \phi(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x}^t B \mathbf{y}.$$

   Si verifichi che B ammette autovalori reali e *dimostrare che esiste* una base di autovettori.

   Si verifichi se $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ e' strettamente positivo per ogni $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e si metta questo in relazione col segno degli autovalori della matrice B.

Soluzione

A lezione e' stato fatto un esempio simile con una matrice 3×3: la matrice aveva determinante -1 e quindi non poteva essere congruente a I_3. Se E fosse congruente a I_2 si avrebbe

$$^tMEM = I_2$$

per qualche M invertibile. Ma $detI_2 = 1$ mentre $det(^tMEM) = (detM)^2 detE$ e' negativo. Per quanto riguarda la seconda coppia di matrici A e B: a lezione si e' dimostrato che una matrice antisimmetrica non nulla non e' mai congruente ad una matrice diagonale. Ora A e' antisimmetrica e d'altra parte B e' simmetrica ed e' quindi congruente ad una matrice diagonale D. Poiche' la relazione di congruenza ha la proprieta' transitiva, se A non puo' essere congruente a D allora non puo' essere neppure congruente a B.

'Gauss-Jordan simmetrico' applicato ad E (è il caso in cui l'algoritmo 'rallenta' di più). 'Gauss-Jordan simmetrico' vuole semplicemente dire che, tutte le volte che faccio una delle solite operazioni I,II,III di Gauss-Jordan 'solito', dopo devo subito ripeterla sulle colonne. (I: se scambio le righe 1 e 2 devo, nella nuova matrice, scambiare le colonne 1 e 2), (II: se moltiplico la riga n per una costante k poi devo rimoltiplicare anche la colonna n per la stessa costante k). (III: se alla riga R_p sostituisco $R_p + kR_q$ $(p \neq q)$, devo poi fare lo stesso con le colonne C'_p, C'_q della matrice C' cosi' ottenuta. Cioe' devo sostituire C'_p con $C'_p + kC'_q$.)

Il caso di E: il passaggio I non funziona. Neanche il II. Posso solo ricominciare da III ...:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

nella seconda matrice abbiamo $R_1 + R_2$, R_2 come righe. Nella terza $C'_1 + C'_2$, C'_2 come colonne (C'_x indica una colonna della seconda matrice). Applichiamo ancora il III passaggio:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Nella seconda matrice le righe sono R_1, $R_2 - \frac{1}{2}R_1$. Nella terza le colonne sono C'_1, $C'_2 - \frac{1}{2}C'_1$.