Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/02
Geometria 1
Lavoro Guidato - Dr. Valerio Talamanca
Venerdi 15

Esercizio 1. *Verificare che i seguenti sono spazi vettoriali:*
a) Sia $\mathbb{R}[X]$ *l'insieme dei polinomi in una variabile. Dati* $F(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ *e* $G(X) = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m$ *due polinomi* $(n \geq m)$ *e* $\lambda\in\mathbb{R}$, *poniamo:*

$$F(X) + G(X) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)X + \cdots + (a_n + b_m)X^n \qquad e \qquad \lambda \cdot F(X) = \lambda a_0 + \lambda a_1X + \cdots + \lambda a_nX^n$$

dove si e posto $b_i = 0$ *per* $i = m + 1, \ldots, n$.
b) Sia $X \subset \mathbb{R}$ *un intervallo aperto e denotiamo con* $C(X, \mathbb{R})$ *l'insieme delle funzioni continue da* X *in* $\mathbb{R}$. *Date* $f, g\in C(X, \mathbb{R})$ *e* $\lambda\in\mathbb{R}$, *poniamo:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad e \qquad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x).$$

c) Sia $S(\mathbb{R})$ *l'insieme delle successioni (di numeri reali). Date* $\{a_n\}$ $\{b_n\}$ *e* $\lambda\in\mathbb{R}$, *poniamo:*

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} \qquad e \qquad \lambda\{a_n\} = \{\lambda a_n\}$$

d) Sia $M_(n \times m)$ *lo spazio delle matrici* $n \times m$. *Date* $A = (a_{ij})$ *e* $B = (b_{ij})$ *e* $\lambda\in\mathbb{R}$, *poniamo:*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}) \qquad e \qquad \lambda A = (\lambda a_{ij})$$

Esercizio 2. *Verificare se i seguenti sottoinsiemi sono sottospazi vettoriali:*
a.1) $D_3 = \{F(X)\in\mathbb{R}[X] \mid \textit{il grado di } F(X) \textit{ è al più } 3\}$
a.2) $P_3 = \{F(X)\in\mathbb{R}[X] \mid \textit{il grado di } F(X) \textit{ è almeno } 3\}$
a.2) $S_3 = \{F(X)\in\mathbb{R}[X] \mid \textit{il grado di } F(X) \textit{ è } 3\}$

b.1) $C_0 = \{f\in C(X, \mathbb{R}) \mid f(x) = 0 \textit{per almeno un } x\in X\}$
b.2) Sia $x_0\in X$, *e poniamo:* $C_{x_0} = \{f\in C(X, \mathbb{R}) \mid f(x_0) = 0\}$
b.3) Sia $x_1\in X$, *e poniamo:* $C^*_{x_1} = \{f\in C(X, \mathbb{R}) \mid f(x_1) \neq 0\}$

c.1) $L(\mathbb{R}) = \{\{a_n\}\in S(\mathbb{R}) \mid \textit{esiste} L\in\mathbb{R} \textit{ tale che} |a_n| \leq R \forall n\in\mathbb{N}\}$
c.2) $S_k(\mathbb{R}) = \{\{a_n\}\in S(\mathbb{R}) \mid a_k = 0\}$
c.3) $S^*_k(\mathbb{R}) = \{\{a_n\}\in S(\mathbb{R}) \mid a_k \neq 0\}$

d.1) $SM_n = \{A\in M_n \mid {}^tA = A\}$
d.2) $O_n = \{A\in M_n \mid {}^tA = A^{-1}\}$
d.3) $AM_n = \{A\in M_n \mid {}^tA = -A\}$
d.4) $T_n = \{A\in M_n \mid A \textit{ è una matrice triangolare superiore}\}$
d.5) $D_n = \{A\in M_n \mid A \textit{ è una matrice diagonale}\}$
d.6) $ST_n = \{A\in M_n \mid A \textit{ è una matrice strettamente triangolare superiore}\}$
d.7) $N_n = \{A\in M_n \mid A \textit{ è una matrice nilpotente}\}$
d.8) $U_n = \{A\in M_n \mid A \textit{ è una matrice unipotente}\}$