Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/02
Geometria 1
Lavoro Guidato - Dr. Valerio Talamanca
Venerdi 8 marzo

Esercizio 1. *Risolvere i seguenti sistemi con il metodo di eliminazione di Gauss-Jordan:*

$$a)\begin{cases} X_1 - \frac{1}{5}X_2 - \frac{3}{5}X_3 = \frac{1}{5} \\ 5X_1 + 2X_2 - 2X_3 = 6 \\ 10X_1 - 2X_2 - 5X_3 = 3 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 3X_1 - 6X_2 + X_3 = 1 \\ 9X_1 + 18X_2 + 3X_3 = 3 \\ 9X_1 + 54X_2 + 10X_3 = 1 \end{cases} \quad c)\begin{cases} 2X_2 + X_4 + 5X_5 = 1 \\ 2X_1 + 2X_3 + X_4 - 3X_5 = 1 \\ X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 = 1 \end{cases}$$

$$d)\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 1 \\ X_1 + X_2 - X_3 = 1 \\ X_1 - X_2 - X_3 = 1 \end{cases} \quad e)\begin{cases} -3X_1 - X_2 + 4X_3 = 2 \\ 7X_1 + \sqrt{2}X_2 + \sqrt{3}X_3 = 1 \\ 10X_1 + (\sqrt{2}+1)X_2 + (\sqrt{3} - 4X_3 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2. *Cosideriamo seguenti sistemi:*

$$a)\begin{cases} kX_1 + X_2 + 3X_3 = 1 \\ X_1 + X_2 + 3X_3 = 1 \\ 3X_1 + X_2 + 3X_3 = 1 \end{cases} \quad b)\begin{cases} 5X_1 + 4X_2 + 3X_3 = k \\ 2X_1 - 3X_2 + 2X_3 = 3 \\ 16X_1 - X_2 + 12X_3 = 3k \end{cases} \quad c)\begin{cases} 3kX_1 + 2kX_2 + 5X_3 = 2 \\ 2kX_1 - 7kX_2 + 2X_3 = 1 \\ kX_1 - 16kX_2 - X_3 = 0 \end{cases}$$

si determini, al variare di k in $\mathbb{R}$, quando il sistema ammette un unica soluzione, infinite, nessuna.

Esercizio 3. *Sia $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in M_2$. Dimostrare che A è invertibile se e soltanto se $ad - bc \neq 0$ e trovare una formula per l'inversa.*

Esercizio 4. *Dimostrare che una matrice diagonale*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

è in veribile se e solo se $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \neq 0$ ed in tal caso la sua inversa è :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^{-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{-1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn^{-1}} \end{pmatrix}$$

Esercizio 5. *Calcolare, se esiste, l'inverso delle seguenti matrici*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$