Università degli studi di Roma Tre
Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2001/02
Geometria 1
Lavoro Guidato - Dr. Valerio Talamanca
Venerdi 1 marzo

Esercizio 1. *Sia* $A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 1-k & 1 \end{pmatrix}$. *Per quali valori di* $k \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$A^2 + {}^tAA + \mathrm{I} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. *Sia* $A \in M_n$. *Dimostrare che* $A + {}^tA$ *è simmetrica e che* $A - {}^tA$ *è antisimmetrica. Dedurne che ogni matricie di* M_n *si può scrivere come la somma di un matrice simmetrica ed una anti-simmetrica. Tale decomposizione è unica?*

Esercizio 3. *Per quali valori di* $k \in \mathbb{R}$ *la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k^3 - 3k^2 + 3 & 1 \\ k^3 - 2k^2 + 2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

è simmetrica.

Esercizio 4. *Una matrice* $A \in M_n$ *si dice nilpotente se* $A^k = 0$ *per qualche* $k \geq 1$. *Verificare che le seguenti matrici sono nilpotenti:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dimostrare che ogni matrice strettamente triangolare (superiore o inferiore) è nilpotente. Dimostrare inoltre che una matrice triangolare è nilpotente se e soltanto se è strettamente triangolare.

Esercizio 5. *Dimostrare che una matrice nilpotente non è invertibile.*

Esercizio 6. *Determinare quali delle seguenti matrici sono nilpotenti:*

$$A = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -5 & 78 & 87 & 45 \\ 23 & 24 & 15 & -67 \\ 17 & 21 & -5 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 7. *Una matrice si dice unipotente se* $A^k = I$ *per qualche* $k \geq 1$. *Dimostrare che una matrice unipotente è invertibile. Dimostrare inoltre l'insieme* $\{A^k\,;\, k\in\mathbb{N}\}$ *è un gruppo se e soltanto se* A *è unipotente.*

Esercizio 8. *Esiste in* M_2 *una matrice, diversa da* I *e* $-I$, *che sia*

(1) *ortogonale e unipotente;*
(2) *ortogonale e simmetrica;*
(3) *ortogonale e nilpotente;*
(4) *ortogonale e antisimmetrica.*

Esercizio 8. *Quali delle seguenti matrici sono ortogonali:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & d & -c \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$