UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 27-6-2002 - a.a. 2001-2002

1. Sia V uno spazio vettoriale, U, W due suoi sottospazi.
(a) Si enunci il risultato che relaziona le dimensioni di $U \cap W$ e di $U + W$;
(b) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h, k \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} kX_1 + hX_2 + X_4 = -1 \\ X_1 + kX_3 + X_4 = 2 \\ -X_1 + 2X_3 - X_4 = -2 \\ X_1 + kX_2 + hX_3 = 1 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni.

3. Sia a un numero reale e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a per i quali A si può esprimere come prodotto di matrici elementari e si scriva esplicitamente tale prodotto.

4. Sia $V = \mathbb{R}^4$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, e siano $w_1 = (-2, 0, 2, 3), w_2 = (-1, 0, \frac{2}{3}, 1)$, $w_3 = (\frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{2})$ e $W =< w_1, w_2, w_3 >$.

(a) Calcolare $dimW$ usando esclusivamente operazioni elementari sui vettori;

(b) Determinare due sottospazi U_1 e U_2 di V tali che :

$$U_1 \oplus W = U_2 \oplus W = U_1 \oplus U_2 = V;$$

(c) Siano $p_{U_1} : V \to W$ e $p_{U_2} : V \to W$ le due proiezioni parallelamente ad U_1 ed U_2. Determinare tutti i vettori $v \in V$ tali che $p_{U_1}(v) = p_{U_2}(v)$.

5. (a) Si definiscano rango e determinante di una matrice;
(b) si enunci il risultato che relaziona rango, determinante ed invertibilità di una matrice;
(c) si dimostri tale risultato.

6. Sia A uno spazio affine di dimensione 4 su uno spazio vettoriale reale V e sia Oe_1, e_2, e_3, e_4 un riferimento affine. Siano H l'iperpiano di equazione $2X_1 - X_2 + X_3 = 0$ e q il piano di equazioni $\begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ X_4 = 0 \end{cases}$.

Determinare tutti i piani $p \subset H$ tali che p passa per i punti $P_1(1,0,-2,0), P_2(-1,1,3,1)$ e p interseca q in un punto.

7. Siano V e W due spazi vettoriali reali, $F : V \to W$ un'applicazione lineare. Siano $U \subset V$ un sottospazio tale che $V = N(F) \oplus U$ e $G : U \to Im(F)$ l'applicazione lineare definita da $G(u) = F(u)$ per ogni $u \in U$.

(a) Dimostrare che G è iniettiva;

(b) Dimostrare che G è un isomorfismo;

(c) U è isomorfo a $V/N(F)$?

8. Sia $A \in M_3(\mathbb{R})$ la seguente matrice: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & t \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;

(b) trovare basi per gli autospazi di A;

(c) determinare i valori di t per i quali A è diagonalizzabile.

SOLUZIONI

1. (a) e (b) [Sernesi, Teorema 4.18].

2. Dalla matrice

$$\begin{pmatrix} k & h & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & k & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & k & h & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con scambi di righe otteniamo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 & 2 \\ 1 & k & h & 0 & 1 \\ k & h & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

da cui, con le operazioni $R_2 \to R_2 - R_1, R_3 \to R_3 - kR_1, R_4 \to R_4 + R_1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 & 2 \\ 0 & k & h-k & -1 & -1 \\ 0 & h & -k^2 & 1-k & -1-2k \\ 0 & 0 & k+2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

CASO 1: $k = 0$.

La martice è allora

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & h & -1 & -1 \\ 0 & h & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, dividendo R_4 per 2 e scambiando righe si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & h & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_4 \to R_4 - hR_3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & h & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

che determina $X_4 = 1, X_3 = 0, X_1 = 1, hX_2 = -2$. Dunque il sistema è incompatibile se $k = h = 0$, mentre se $k = 0, h \neq 0$ ha un'unica soluzione $X_2 = -\frac{2}{h}$.

CASO 2: $k \neq 0, -2$.

Dividendo R_4 per $k+2$ e R_2 per k si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{h-k}{k} & -\frac{1}{k} & -\frac{1}{k} \\ 0 & h & -k^2 & 1-k & -1-2k \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e con l'operazione $R_3 \to R_3 - hR_2$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{h-k}{k} & -\frac{1}{k} & -\frac{1}{k} \\ 0 & 0 & -k^2 - \frac{h(h-k)}{k} & 1-k+\frac{h}{k} & -1-2k+\frac{h}{k} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e rimoltiplicando per k e scambiando righe

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 & 2 \\ 0 & k & h-k & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^3-h^2+hk & k-k^2+h & -k-2k^2+h \end{pmatrix}$$

da cui, con l'operazione $R_4 \to R_4 - (-k^3 - h^2 + hk)R_3$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & k & 1 & 2 \\ 0 & k & h-k & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-k^2+h & -k-2k^2+h \end{pmatrix}$$

che determina il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + kX_3 + X_4 = 2 \\ kX_2 + (h-k)X_3 - X_4 = -1 \\ X_3 = 0 \\ (k - k^2 + h)X_4 = -k - 2k^2 + h \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} X_1 + X_4 = 2 \\ kX_2 - X_4 = -1 \\ X_3 = 0 \\ (k - k^2 + h)X_4 = -k - 2k^2 + h \end{cases}.$$

Ora se $h = k^2 - k$ l'ultima equazione diventa $0 = -k(k+2) \neq 0$, quindi il sistema è incompatibile. Se invece $h \neq k^2 - k$ si determina l'unica soluzione

$$X_1 = 2 - \frac{-k - 2k^2 + h}{k - k^2 + h}, X_2 = -\frac{1}{k} + \frac{-k - 2k^2 + h}{k(k - k^2 + h)}, X_3 = 0, X_4 = \frac{-k - 2k^2 + h}{k - k^2 + h}.$$

CASO 3: $k = -2$.

Con le stesse operazioni del caso 2 (eccetto la divisione per $k + 2$) la matrice è

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & h+2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 - h^2 - 2h & h-6 & h-6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che determina il sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 - 2X_3 + X_4 = 2 \\ -2X_2 + (h+2)X_3 - X_4 = -1 \\ (8 - h^2 - 2h)X_3 + (h-6)X_4 = h - 6 \end{cases}$$

e si vede che se $h = 2, -4$, ponendo $X_3 = t$, si trovano le infinite soluzioni

$$X_1 = 1 + 2t, X_2 = \frac{h+2}{2}t, X_4 = 1.$$

Infine se $h \neq 2, 4$, ponendo $X_4 = t$, si trovano le infinite soluzioni

$$X_1 = 2 - t + \frac{2(h-6)(1-t)}{8 - h^2 - 2h}, X_2 = \frac{1-t}{2} + \frac{(h+2)(h-6)(1-t)}{16 - 2h^2 - 4h},$$

$$X_3 = \frac{(h-6)(1-t)}{8 - h^2 - 2h}. \blacksquare$$

3. Ricordiamo che una matrice è invertibile se e solo se è prodotto di matrici elementari, quindi A si può esprimere come prodotto di matrici elementari se e solo se

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a \neq 0$$

cioè se e solo se $a \neq 1$. Ora, per $a \neq 1$, fattorizziamo A in prodotto di matrici elementari. Scambiando R_1 con R_2 e poi R_2 con R_3 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Le operazioni $R_2 \to R_2 - 2R_1$ e $R_3 \to R_3 - R_1$ danno la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

e dividendo R_2 per -2 e R_3 per $a-1$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

da cui, scambiando R_2 con R_3, si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ora le operazioni $R_1 \to R_1 - R_2$ e $R_3 \to R_3 - R_2$ danno la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

da cui, moltiplicando R_3 per -2 si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ricordiamo che fare operazioni elementari su una matrice equivale a moltiplicarla a sinistra per la matrice elementare corrispondente. Con la notazione del [Sernesi, par. 3.6] abbiamo allora mostrato che

$$R_3(-2)R_{32}(-1)R_{12}(-1)R_{23}R_3(\frac{1}{a-1})R_2(-\frac{1}{2})R_{31}(-1)R_{21}(-2)R_{23}R_{12}A = I_3$$

e quindi

$A =$

$$R_{12}^{-1}R_{23}^{-1}R_{21}(-2)^{-1}R_{31}(-1)^{-1}R_2(-\frac{1}{2})^{-1}R_3(\frac{1}{a-1})^{-1}R_{23}^{-1}R_{12}(-1)^{-1}R_{32}(-1)^{-1}R_3(-2)^{-1}$$

cioè

$$A = R_{12}R_{23}R_{21}(2)R_{31}(1)R_2(-2)R_3(a-1)R_{23}R_{12}(1)R_{32}(1)R_3(-\frac{1}{2}). \blacksquare$$

4. (a) Applicando operazioni elementari alla matrice

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

si ottiene

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = B$$

e dunque $dimW = r(B) = 2$.

(b) Scegliamo $u_{11} = (0,1,0,0), u_{12} = (0,0,0,1), u_{21} = (0,0,1,0), u_{22} = (1,1,0,0)$ e poniamo $U_1 =< u_{11}, u_{12} >, U_2 =< u_{21}, u_{22} >$. Per verificare che $U_1 \oplus W = U_2 \oplus W =$ $= U_1 \oplus U_2 = V$ è sufficiente verificare che $\{w_1, w_2, u_{11}, u_{12}\}, \{w_1, w_2, u_{21}, u_{22}\}$, $\{u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22}\}$ sono tre basi di V. Ció è vero dato che i tre determinanti

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{2}{3}, \quad \begin{vmatrix} -2 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & \frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

sono diversi da zero.

(c) Per la somma diretta si ha $\forall v \in V, v = u_1 + w_4 = u_2 + w_5$, dove $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$, $w_4, w_5 \in W$. Per definizione di proiezione si ha dunque $p_{U_1}(v) = w_4 = p_{U_2}(v) = w_5$. Ma se $w_4 = w_5$ si ha anche $u_1 = u_2$ e dunque $u_1 \in U_1 \cap U_2 =< 0 >$, cioè $u_1 = u_2 = 0$ e $v = w_4$ è un qualunque vettore di W. $\blacksquare$

5. (a) [Sernesi, par. 5 e Teorema 5.1] (rango), [Sernesi, Definizione 6.1] (determinante). (b) [Sernesi, Teoremi 5.4 e 6.4].

6. Dato che $p \subset H$, possiamo prendere come equazioni di p le seguenti:

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ AX_1 + BX_2 + CX_3 + DX_4 + F = 0. \end{cases}$$

Imponendo il passaggio di p per P_1 e P_2 si ottiene

$$\begin{cases} A - 2C + F = 0 \\ -A + B + 3C + D + F = 0 \end{cases}$$

da cui risolvendo $A = 2C - F, B = -C - D - 2F$. Intersecando p con q si ha il sistema

$$\begin{cases} X_4 = 0 \\ X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ 2X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ (2C - F)X_1 - (C + D + 2F)X_2 + CX_3 + DX_4 + F = 0 \end{cases}$$

che ha un'unica soluzione (cioè un punto) se il determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2C - F & -C - D - 2F & C & D \end{vmatrix} = D + 2F \neq 0.$$

(risolvendo si ottiene il punto di coordinate $X_1 = 0, X_2 = X_3 = \frac{F}{D+2F}, X_4 = 0$).
Dunque l'equazione di p è, per ogni C, D, F, tali che $D + 2F \neq 0$:

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 + X_3 = 0 \\ (2C - F)X_1 - (C + D + 2F)X_2 + CX_3 + DX_4 + F = 0. \; \blacksquare \end{cases}$$

7. (a) Sia $u \in N(G)$. Allora $G(u) = 0$, quindi, per definizione di G, si ha $F(u) = 0$. Dunque $u \in N(F)$, quindi $u \in N(F) \cap U = \{0\}$, cioè $u = 0$. Ne segue che G è iniettiva.
(b) Dato $w \in Im(F)$ esiste $v \in V$ tale che $w = F(v)$ e, per definizione di somma diretta, esistono, $z \in N(F), u \in U$ tali che $v = z + u$. Ma allora $w = F(v) = F(z) + F(u) = F(u) = G(u)$, dunque G è suriettiva. Quindi G è un isomorfismo per la parte (a). (c) Per la (b) $U \cong Im(F)$ e per il teorema dell'omomorfismo ([Sernesi, Teorema 11.9]) $Im(F) \cong V/N(F)$. Ne segue che $U \cong V/N(F)$. $\blacksquare$

8. (a) Si ha

$$p_A(T) = \begin{vmatrix} 2 - T & 0 & 1 \\ 0 & 2 - T & 1 \\ -2 & 1 & t - T \end{vmatrix} = (2-T)[(2-T)(t-T)+1] = (2-T)[T^2-(2+t)T+2t+1].$$

(b) e (c) La parte quadratica di $p_A(T)$ ha soluzioni se e solo se $t \leq 0$ o $t \geq 4$, coincidenti se $t = 0, 4$. Se ne deduce che gli autovalori di A sono:

(i) se $0 < t < 4$, c'è un unico autovalore $\lambda_1 = 2$;

(ii) se $t = 0$, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1$;

(iii) se $t = 4$, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$;

(iv) se $t < 0$ o $t > 4$, $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \frac{1}{2}(2 + t - \sqrt{t^2 - 4t}), \lambda_3 = \frac{1}{2}(2 + t + \sqrt{t^2 - 4t})$.

Si noti che in ogni caso $\lambda_2 \neq 2 \neq \lambda_3$. In particolare A non è diagonalizzabile nel caso (i) (dato che $dimV_{\lambda_1}(A) = 1$), mentre lo è nel caso (iv) dato che A ha tre autovalori distinti (e lo spazio ha dimensione 3!!). Ciò risponde alla (c) in questi due casi.

Ora vediamo $dimV_{\lambda_1}(A)$: i suoi autovettori sono le soluzioni di

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & t-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè $Y = 2X, Z = 0$. Dunque una base di $dimV_{\lambda_1}(A)$ è costituita da $v_1 = (1, 2, 0)$ (questo vale per ogni t).

Sia $t = 0$ e vediamo $dimV_{\lambda_2}(A)$: i suoi autovettori sono le soluzioni di

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè $X = Y = -Z$. Dunque una base di $dimV_{\lambda_2}(A)$ è costituita da $v_2 = (1, 1, -1)$ e A non è diagonalizzabile nel caso (ii).

Sia $t = 4$ e vediamo $dimV_{\lambda_2}(A)$: i suoi autovettori sono le soluzioni di

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè $X = Y = Z$. Dunque una base di $dimV_{\lambda_2}(A)$ è costituita da $v_2 = (1, 1, 1)$ e A non è diagonalizzabile nel caso (iii).

Infine nel caso (iv) vediamo $dimV_{\lambda}(A)$ dove $\lambda = \frac{1}{2}(2 + t \pm \sqrt{t^2 - 4t})$: i suoi autovettori sono le soluzioni di

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & t-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè $(2 - \lambda)X + Z = 0, (2 - \lambda)Y + Z = 0$, quindi per esempio $X = Y = 1, Z = \lambda - 2$. Dunque una base di $dimV_{\lambda}(A)$ è costituita da $v_{\lambda} = (1, 1, \lambda - 2)$. ■