UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 16-7-2002 - a.a. 2001-2002

1. Sia V uno spazio vettoriale reale.

(a) Si definiscano le nozioni di indipendenza lineare tra vettori di V e di dimensione di V;

(b) Si enunci il risultato che relaziona la dipendenza o indipendenza lineare tra due insiemi di vettori di V ed il loro numero;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} hX_1 + hX_2 + X_3 = 1 \\ X_1 + hX_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + hX_2 - X_3 = 1 \\ X_1 + X_2 + hX_3 = 0 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni.

3. Siano a e b due numeri reali e si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} b & 1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Si determinino, con sole operazioni elementari, i valori di a e b per i quali A è (o no) invertibile e, in tal caso, si calcoli l'inversa.

4. Sia $k \in \mathbb{R}$ e $V = \mathbb{R}^4$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

Siano $w_1 = (1,0,2,3), w_2 = (0,0,2,1), w_3 = (\frac{k}{3} - 1, -1, \frac{2k-1}{3}, \frac{3k-2}{3}), w_4 = (1,1,1,1)$,

$u_1 = (1,0,1,1), u_2 = (22,4,16,20), u_3 = (-1,2,-2,0), u_4 = (1,1,0,1)$ e

$U =< u_1, u_2, u_3, u_4 >, W =< w_1, w_2, w_3, w_4 >$.

(a) Determinare $U \cap W$ ed una sua base;

(b) determinare tutti i sottospazi L di dimensione 2 di V tali che

$$U \cap W + L \neq V.$$

5. (a) Si definiscano le nozioni di spazio e sottospazio affine;

(b) si enunci il risultato che relaziona l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare con i sottospazi affini;

(c) si dimostri tale risultato.

6. Sia **A** uno spazio affine di dimensione 3 su uno spazio vettoriale reale V e sia Oe_1, e_2, e_3, un riferimento affine. Siano $A(3,1,0), B(0,1,1)$ e $Q(1,1,1)$ tre punti di **A** e r la retta in **A** di equazioni cartesiane $\begin{cases} 2X - Y + Z + 2 = 0 \\ X + Y - Z - 2 = 0 \end{cases}$.

(a) Determinare se esistono punti P appartenenti alla retta $\overline{AB}$ tali che la retta $\overline{PQ}$ è complanare con r.

(b) Determinare se esistono punti P **non appartenenti** alla retta $\overline{AB}$ tali che la retta $\overline{PQ}$ è incidente r.

7. Sia $A \in M_2$ una matrice e $F : M_2 \to M_2$ l'applicazione definita da

$$F(B) = AB.$$

(a) Dimostrare che F è lineare e calcolare una matrice di F;

(b) determinare $N(F), Im(F)$ e le loro dimensioni in funzione di A;

(c) determinare per quali A si ha che F è iniettiva.

8. Sia m un numero reale ed $A \in M_4$ la seguente matrice: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & m+1 \\ 0 & 0 & 0 & m \end{pmatrix}$.

(a) Calcolare il polinomio caratteristico di A;

(b) Determinare per quali valori di m la matrice A è diagonalizzabile;

(c) Per almeno un valore trovato in (b) trovare una matrice $M \in GL_4$ tale che $M^{-1}AM$ è diagonale.