UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Corso di Laurea in Matematica

GEOMETRIA 1

Prova scritta del 13-9-2002 - a.a. 2001-2002

1. Sia V uno spazio vettoriale reale.

(a) Si definisca la nozione di base finita di V;

(b) Si enunci il risultato che relaziona insiemi di vettori linearmente indipendenti di V con la dimensione di V e con le basi di V;

(c) si dimostri tale risultato.

2. Determinare per quali valori $h \in \mathbb{R}$, è (o no) compatibile il seguente sistema lineare

$$\begin{cases} X_1 + hX_2 + X_3 = 0 \\ X_1 + X_3 + X_4 = 0 \\ hX_1 + X_2 - X_3 = 2 \\ X_1 + hX_2 + X_4 = 0 \end{cases}$$

e calcolarne esplicitamente le soluzioni.

3. Sia a un numero reale e si considerino le due matrici

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si determinino i valori di a per i quali A può essere trasformata in B con sole operazioni elementari.

4. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sia W il sottospazio vettoriale di equazione $2X - Y + Z = 0$, e sia $v = (1, 1, 1)$.

(a) Si determini una base $\{f_1, f_2\}$ di W tale che posto $f_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $f_2 = (a_2, b_2, c_2)$ si ha

$$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

e $\{f_1, f_2, v\}$ è una base di $\mathbb{R}^3$ orientata concordemente alla base standard $\{E_1, E_2, E_3\}$;

(b) Si determinino tutti i sottospazi U di $\mathbb{R}^3$ tali che

$$U \cap W + < v > = \mathbb{R}^3.$$

5. (a) Siano V, W due spazi vettoriali reali e $F : V \to W$ un'applicazione lineare.

(a) Si definiscano il nucleo e l'immagine di F e se ne indichino le proprietà;

(b) si enunci il teorema di omomorfismo tra spazi vettoriali;

(c) si dimostri tale risultato.

6. Sia **A** uno spazio affine reale di dimensione 3 e ne sia O, e_1, e_2, e_3 un riferimento affine.

(a) Si determini l'equazione del fascio di piani paralleli aventi giacitura $< e_1 - e_2, e_1 + e_3 >$;

(b) Per ogni piano π appartenente a tale fascio si determini il punto medio M_π del segmento di estremi $A_\pi = \pi \cap a, B_\pi = \pi \cap b$ dove a e b sono le rette seguenti:

$$a : \begin{cases} X - 2Y + 1 = 0 \\ -2X - Y + Z = 0 \end{cases}, \quad b : \begin{cases} 3X - Y - Z + 2 = 0 \\ X - 2Y + 3Z - 1 = 0 \end{cases};$$

[si ricorda che il punto medio di un segmento AB, dove $A = (a_1, a_2, a_3), B = (b_1, b_2, b_3)$ è il punto di coordinate

$$\left(\frac{a_1 + b_1}{2}, \frac{a_2 + b_2}{2}, \frac{a_3 + b_3}{2}\right) \;]$$

(c) si determini la giacitura della retta descritta dal punto M_π al variare di π.

7. Sia k un numero reale e si considerino l'applicazione lineare $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y) = (3x + 2y, kx - y)$ e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini se esistono valori di k tali che $\mathbb{R}^2/N(F)$ ha dimensione 1, e per un tale k, si determini una base di $\mathbb{R}^2/N(F)$;

(a) si determini se esistono valori di k tali che A è la matrice di F in qualche base di $\mathbb{R}^2$.

8. Sia m un numero reale ed A la seguente matrice:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}m & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini per quali valori di m la matrice A è diagonalizzabile;

(b) si dimostri che per $m = 1$ esiste una matrice M ortogonale, di determinante 1, che diagonalizza A;

(c) si mostri che, per $m = 1$, esiste un vettore v con la seguente proprietà: ogni base diagonalizzante di A contiene un vettore proporzionale a v.