*ISTITUZIONI di FISICA MATEMATICA (1 modulo), A.A. 2000/01*
*COMPITO (21/12/00)*

*Esercizio 1* (7 punti)
Determinare la soluzione del seguente problema

$$u_{xx} + 1 = u_{tt} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad t > 0$$
$$u(0, x) = e^{-x^2}; \qquad u_t(0, x) = 0 \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

**Soluzione**
Cerchiamo la soluzione $u(t, x) = \frac{1}{2}t^2 + w(t, x)$, con $w(t, x)$ soluzione di

$$w_{xx} = w_{tt} \qquad x \in \mathbb{R} \qquad t > 0$$
$$u(0, x) = e^{-x^2}; \qquad u_t(0, x) = 0 \qquad\qquad x \in \mathbb{R}$$

La soluzione $w(t, x)$ é data da

$$w(t, x) = \frac{1}{2}\left[e^{-(x+t)^2} + e^{-(x-t)^2}\right]$$

*Esercizio 2* (8 punti)
Determinare la soluzione $u(x, y)$ di

$$yu_x + xu_y = u^2 \qquad\qquad x > 0$$
$$u(x, 0) = x$$

Determinare inoltre il luogo dei punti nei quali la soluzione presenta delle singolaritá.

**Soluzione**
La soluzione esiste poiché la condizione di esistenza e unicitá locale é verificata per $x > 0$. Le equazioni per le caratteristiche sono

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t, s) = y \\ &\frac{d}{dt}y(t, s) = x \\ &\frac{d}{dt}z(t, s) = z^2 \\ &x(0, s) = s \qquad y(0, s) = 0 \qquad z(0, s) = s \end{aligned} \tag{(1)}$$

Si trova facilmente $x^2 - y^2 = s^2$, $z(t, s) = \frac{s}{1-ts}$. Si ricava $x = \sqrt{s^2 + y^2}$ (si é scelta la determinazione positiva poiché $x > 0$). Sostituendo nella seconda equazione di (1) si ricava $\ln(\frac{y}{s} + \sqrt{\frac{y^2}{s^2} + 1}) = t$. Si ricorda che

$$\int_0^y \frac{dy'}{\sqrt{s^2 + {y'}^2}} = arcsinh\frac{y}{s} = \ln(\frac{y}{s} + \sqrt{\frac{y^2}{s^2} + 1})$$

Quindi

$$z(t(x, y), s(x, y)) = u(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{1 - \sqrt{x^2 - y^2}\ln(\frac{y+x}{\sqrt{x^2-y^2}})} =$$

$$\frac{\sqrt{x^2 - y^2}}{1 - \sqrt{x^2 - y^2}\frac{1}{2}\ln(\frac{y+x}{x-y})}$$

La soluzione é ben definita per $x > y$, $y+x > 0$ e per $\{(x,y) : 1-\sqrt{x^2-y^2}\frac{1}{2}\ln(\frac{y+x}{x-y}) \neq 0\}$.

*Esercizio 3* (7punti)
Sia $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi \qquad 0 < y < \pi\}$

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = y \sin x \qquad \text{in} \qquad D \\ &u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \qquad u_y(x,0) = u_y(x,\pi) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

**Soluzione**
Si cerca la soluzione $u(x,y)$ nella forma

$$u(x,y) = \sum_n \sum_m A_{nm} \sin nx \cos my \tag{2}$$

Tale scelta verifica le condizioni al bordo.
In serie di Fourier

$$y = \sum_m B_m \cos my \tag{3}$$

con $B_m = \frac{2}{\pi}\frac{1}{m^2}[(-1)^m - 1]$. Inserendo (2) e (3) in (1) si ottiene che

$$A_{nm} = 0 \qquad n > 1 \qquad\qquad A_{1m} = -\frac{B_m}{1+m^2}$$

La soluzione é quindi

$$u(x,y) = -\sin x \sum_{m \geq 0} \frac{B_m}{1+m^2} \cos my$$

*Esercizio 4* (8 punti)
Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} &u_t = u_{xx} \qquad\qquad x \in [0,1] \qquad 0 < t \\ &u(0,x) = 0 \qquad x \in [0,1] \\ &u(t,0) = 0; \qquad\qquad u_x(t,1) = 2t \end{aligned}$$

Se $t \in [0,T]$, si determinino i punti nei quali la soluzione $u(x,t)$ assume il valore massimo.

**Soluzione**
Cerchiamo la soluzione $u(t,x) = w(t,x) + 2xt$, dove $w(t,x)$ é soluzione di

$$\begin{aligned} &w_t = w_{xx} - 2x \qquad\qquad x \in [0,1] \qquad 0 < t \\ &w(x,0) = 0 \qquad x \in [0,1] \\ &w(t,0) = 0 \qquad\qquad w_x(t,1) = 0 \end{aligned}$$

Per determinare $w(t,x)$ poniamo

$$w(t,x) = \sum_n c_n(t) \sin \pi(n - \frac{1}{2})x$$

Sviluppando in serie di Fourier la funzione $f(x) = x$ si ottiene

$$x = \sum_n b_n \sin \pi(n - \frac{1}{2})x \qquad b_n = 2\int_0^1 dx x \sin \pi(n - \frac{1}{2})x$$

Ricaviamo $c_n(t)$ risolvendo

$$\begin{aligned} c_n'(t) &= -[\pi(n - \frac{1}{2})]^2 c_n(t) - 2b_n \\ c_n(0) &= 0 \end{aligned}$$

Si ottiene

$$c_n(t) = -2(1 - e^{-[\pi(n-\frac{1}{2})]^2 t})b_n$$

Quindi la soluzione é

$$u(t,x) = -2\sum_n (1 - e^{-[\pi(n-\frac{1}{2})]^2 t})b_n \sin \pi(n - \frac{1}{2})x + 2xt$$

Il massimo é raggiunto nel punto $x = 1, t = T$.

*ISTITUZIONI di FISICA MATEMATICA (1 modulo), A.A. 2000/01*
*COMPITO (29/1/01)*

*Esercizio 1* (8 punti)
Determinare la soluzione del seguente problema

$$\begin{aligned} & u_{xx} + u_{yy} = u_{tt} && 0 < x < 1; 0 < y < 1 \qquad t > 0 \\ & u(0, x, y) = 0 && u_t(0, x, y) = 0 \qquad 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ & u(t, 0, y) = 0; && u(t, 1, y) = 1 \qquad u_y(t, x, 0) = u_y(t, x, 1) = 0 \end{aligned}$$

**Soluzione**
Cerchiamo la soluzione $u(t, x, y) = x + w(t, x, y)$ con $w$ soluzione di

$$\begin{aligned} & w_{xx} + w_{yy} = w_{tt} && 0 < x < 1; 0 < y < 1 \qquad t > 0 \\ & w(0, x, y) = -x && u_t(0, x, y) = 0 \qquad 0 < x < 1; 0 < y < 1 \\ & w(t, 0, y) = 0; && w(t, 1, y) = 0 \qquad w_y(t, x, 0) = w_y(t, x, 1) = 0 \end{aligned}$$

La soluzione

$$w(t, x, y) = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 0} T_{nm}(t) \sin n\pi x \cos m\pi y$$

con

$$T_{nm}(t) = A_{nm} \cos \pi\sqrt{(n^2 + m^2)}t + B_{nm} \sin \pi\sqrt{(n^2 + m^2)}t$$

Dalle condizioni iniziali

$$w(0, x, y) = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 0} A_{nm} \sin n\pi x \cos m\pi y = -x$$

$$w_t(0, x, y) = \sum_{n \geq 1} \sum_{m \geq 0} B_{nm} \sin n\pi x \cos m\pi y = 0$$

si deduce che $B_{nm} \equiv 0$ e $A_{nm} = 0$ per $m \geq 1$. Posto $A_{n0} \equiv A_n$, facendo la trasformata di Fourier di $x$

$$-x = \sum_{n \geq 1} b_n \sin n\pi x \qquad b_n = -2 \int_0^1 x \sin n\pi x dx$$

si ottiene che $A_n = b_n$.
La soluzione quindi é

$$u(t, x, y) = x + \sum_{n \geq 1} b_n \cos n\pi t \sin n\pi x$$

*Esercizio 2* (7 punti)
Verificare l'esistenza e determinare la soluzione $u(x, y)$ di

$$\begin{aligned} & (x^2 - 1)u_x + yu_y = yu && x > 0, \\ & u(x, y) = 1 \quad \text{quando} && x = y \end{aligned}$$

**Soluzione**

La soluzione esiste per quei valori di $s$ tali che $s^2-1-s\neq 0$, quindi $s\neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Le equazioni per le caratteristiche sono

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t,s)=x^2-1\\
&\frac{d}{dt}y(t,s)=y\\
&\frac{d}{dt}z(t,s)=yz\\
&x(0,s)=s \qquad y(0,s)=s \qquad z(0,s)=1
\end{aligned}
\tag{(1)}
$$

Si trova facilmente che le soluzioni sono

$$\frac{x-1}{x+1}=e^{2\tau}\frac{s-1}{s+1}$$

$$y=se^{\tau} \qquad\qquad z=\exp\{se^{\tau}-s\}$$

Non si chiede di ricavare $\tau$ e $s$ come funzioni di $x$ e $y$.

*Esercizio 3* (7punti)
Sia $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{1}{2}<x^2+y^2<1\}$. Si determini la soluzione di

$$
\begin{aligned}
&u_{xx}+u_{yy}=0 \qquad \text{in} \qquad D\\
&u(x,y)=1 \qquad \text{quando} x^2+y^2=\frac{1}{2}\\
&u(x,y)=2 \qquad \text{quando} x^2+y^2=1
\end{aligned}
$$

**Soluzione** La soluzione in coordinate polari é data da

$$u(r,\theta)=a\log r+b$$

con $a$ e $b$ due costanti tali che

$$b=2 \qquad\qquad a=\frac{1}{\ln\sqrt{2}}$$

*Esercizio 4* (8 punti)
Si determini la soluzione dell'equazione

$$
\begin{aligned}
&u_t=u_{xx}+\sin t\sin\frac{\pi}{2}x \qquad x\in(0,1) \qquad 0<t\\
&u(x,0)=0 \qquad x\in[0,1]\\
&u(0,t)=0 \qquad u_x(1,t)=1 \qquad 0<t
\end{aligned}
$$

**Soluzione** Poniamo la soluzione $u(x,t)=x+v(x,t)$ con

$$
\begin{aligned}
&v_t=v_{xx}+\sin t\sin\frac{\pi}{2}x \qquad x\in(0,1) \qquad 0<t\\
&v(x,0)=-x \qquad x\in[0,1]\\
&v(0,t)=0 \qquad v_x(1,t)=0 \qquad 0<t
\end{aligned}
$$

Si ponga

$$v(x,t) = \sum_{n\geq 1} c_n(t) \sin \pi(n - \frac{1}{2})x$$

con $c_n(t)$ soluzione di

$$c_1'(t) = -\frac{\pi^2}{4} c_1(t) + \sin t$$
$$c_1(0) = b_1$$

$$c_n'(t) = -\pi^2 (n - \frac{1}{2})^2 c_n(t) \qquad\qquad n > 1$$
$$c_n(0) = b_n$$

dove $b_n$, per $n \geq 1$ sono i coefficienti della serie di Fourier

$$-x = \sum_{n\geq 1} b_n \sin \pi(n - \frac{1}{2})x$$

Facilmente si ottiene che

$$c_1(t) = e^{-\frac{\pi^2}{4}t} \left[ b_1 + \int_0^t e^{\frac{\pi^2}{4}s} \sin s ds \right]$$

$$c_n(t) = e^{-\pi^2 (n-\frac{1}{2})^2 t} b_n$$

Quindi

$$v(x,t) = \sum_{n>1} c_n(t) \sin \pi(n - \frac{1}{2})x + c_1(t) \sin \frac{\pi}{2} x$$

*COMPITO (4/6/01)*

*Esercizio 1* (8 punti)
Determinare la soluzione del seguente problema

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad 0 < x < 1; 0 < y < 1$$
$$u(0, y) = 0; \qquad u(1, y) = y \qquad u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0$$

Si discuta inoltre, la convergenza della serie che determina la soluzione e delle sue derivate prime e seconde.

**Soluzione** Per separazione di variabili si calcola facilmente che

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\pi y \sinh n\pi x$$

con $A_n$ costanti da determinare soddisfa le condizioni $u(0, y) = 0; \quad u_y(x, 0) = u_y(x, 1) = 0$. Imponendo di soddisfare l'ulteriore condizione $u(1, y) = y$ si ottiene

$$u(1, y) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos n\pi y \sinh n\pi = y$$

Sviluppando in serie coseno la funzione $y$ in $[0, 1]$ otteniamo

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos n\pi y$$

con

$$b_n = 2 \int_0^1 y \cos n\pi y dy = \frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n - 1]$$

Si ottienne quindi che

$$A_n = \frac{b_n}{\sinh n\pi}$$

La soluzione é quindi

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\sinh n\pi} \cos n\pi y \sinh n\pi x$$

La serie converge uniformente per $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$. Infatti la serie converge assolutamente poiché il termine generico puó essere stimato nel modo seguente

$$|\frac{b_n}{\sinh n\pi} \cos n\pi y \sinh n\pi x| \leq C \frac{1}{n^2} e^{-n\pi[1-x]}$$

con $C$ costante positiva. La serie che si ottiene derivando una volta o due volte sia rispetto a $x$ che ad $y$ converge uniformemente solo per $x \in [0, 1)$, $y \in [0, 1]$. La soluzione che si ottiene é quindi continua in $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, ma derivabile solo per $x \in [0, 1)$, $y \in [0, 1]$.

*Esercizio 2* (7 punti)
Verificare l'esistenza e determinare la soluzione $u(x, y)$ di

$$uu_x + xu_y = 0$$
$$u(0, y) = y$$

**Soluzione**

La soluzione esiste per $y \neq 0$. Le equazioni per le caratteristiche sono

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t,s) = z\\
&\frac{d}{dt}y(t,s) = x\\
&\frac{d}{dt}z(t,s) = 0\\
&x(0,s) = 0 \qquad y(0,s) = s \qquad z(0,s) = s
\end{aligned} \tag{1}$$

Si trova facilmente che le soluzioni sono

$$x(t,s) = st$$

$$y(t,s) = \frac{1}{2}st^2 + s \qquad\qquad z(t,s) = s$$

Ricavando $t$ e $s$ come funzioni di $x$ e $y$ si ottiene

$$t = \frac{x}{s} \qquad\qquad y = \frac{1}{2}s^{-1}x^2 + s$$

Quindi

$$s^2 + \frac{1}{2}x^2 - sy = 0$$

$$s = \frac{1}{2}[y \pm \sqrt{y^2 - 2x^2}]$$

che é ben definita solo se $y^2 - 2x^2 \geq 0$.

Poiché $\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}[y + \sqrt{y^2 - 2x^2}] = y$, la soluzione é

$$u(x,y) = \frac{1}{2}[y + \sqrt{y^2 - 2x^2}]$$

*Esercizio 3* (7 punti)
Si determini la soluzione di

$$\begin{aligned}
&u_{xx} + u_{yy} + e^{-x^2} = u_t \qquad\qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad\qquad t > 0\\
&u(0,x,y) = 0
\end{aligned}$$

**Soluzione** La soluzione é

$$\begin{aligned}
u(t,x,y) &= \int_0^t ds \frac{1}{4\pi(t-s)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{[(x-z)^2+y^2]}{4(t-s)}} e^{-z^2} dydz\\
&= \int_0^t ds \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-z)^2}{4(t-s)}} e^{-z^2} dz
\end{aligned}$$

*Esercizio 4* (8 punti)
Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned}
&u_{tt} = u_{xx} + \sin\frac{1}{2}x \qquad\qquad x \in (0,\pi) \qquad 0 < t\\
&u(x,0) = 0 \qquad\qquad u_t(x,0) = 0 \qquad\qquad x \in [0,\pi]\\
&u(0,t) = 1 \qquad\qquad u_x(\pi,t) = 1 \qquad 0 < t
\end{aligned}$$

**Soluzione** Si cerca la soluzione come

$$u(x,t) = x + 1 + v(x,t)$$

con $v$ soluzione di

$$\begin{array}{lll} v_{tt} = v_{xx} + \sin\frac{1}{2}x & x \in (0,\pi) & 0 < t \\ v(x,0) = -[x+1] & v_t(x,0) = 0 & x \in [0,1] \\ v(0,t) = 0 & v_x(\pi,t) = 0 & 0 < t \end{array}$$

Per separazione di variabili

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\frac{2n-1}{2}x$$

soddisfa $v(0,t) = 0$, $v_x(\pi,t) = 0$ e $c_n(t)$ sono coefficienti da determinare in modo da soddisfare $v(x,0) = -[x+1]$, $v_t(x,0) = 0$.

Si ottiene

$$c_1''(t) = -[\frac{1}{2}]^2 c_1(t) + 1 \qquad n = 1$$

$$c_n''(t) = -[\frac{2n-1}{2}]^2 c_n(t) \qquad n \geq 2$$

con condizioni iniziali $c_n(0) = d_n$, $c_n'(0) = 0$ per $n \geq 1$ con $d_n$ dato da

$$d_n = -\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} dx[x+1]\sin\frac{n}{2}x$$

Si ottiene

$$c_1(t) = 4 + (d_1 - 4)\cos\frac{1}{2}t \qquad c_n(t) = d_n \cos\frac{2n-1}{2}t \qquad n \geq 2$$

*COMPITO (12/7/01)*

*Esercizio 1* (6 punti)
Si determini la soluzione di

$$\begin{array}{lll}\Delta u(x,y)=0 & -1<x<1 & 0<y<\sqrt{1-x^2}\\ u(x,0)=0 & -1\leq x\leq 1; \quad u(x,y)=y & x^2+y^2=1\end{array}$$

**Soluzione** In coordinate polari il dominio $D=\{-1<x<1 \qquad 0<y<\sqrt{1-x^2}\}$ é rappresentato da $0<\theta<\frac{\pi}{2}, \qquad 0<r<1$. Sia

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} r^n[A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta]+M\theta+C$$

con $A_n, B_n, M, C$ costanti da determinare una funzione che é certamente armonica in $D$. Imponendo le condizioni al bordo si ottiene $M=C=A_n=0$ e

$$u(1,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin n\theta=\sin\theta$$

Da quest'ultima si deduce $B_1=1$, $B_n=0$ per $n\geq 2$.

*Esercizio 2* (7 punti)
Verificare l'esistenza e determinare la soluzione in forma parametrica di

$$\begin{array}{l}(x+1)u_y-yu_x=u\\ u(0,y)=y^2\end{array}$$

**Soluzione** La soluzione esiste per $y\neq 0$. Le equazioni per le caratteristiche sono

$$\begin{array}{l}\frac{d}{dt}x(t,s)=-y\\ \frac{d}{dt}y(t,s)=x+1\\ \frac{d}{dt}z(t,s)=z\\ x(0,s)=0 \qquad y(0,s)=s \qquad z(0,s)=s^2\end{array} \tag{1}$$

La soluzione, in forma parametrica, é

$$x(t,s)=\cos t-s\sin t-1$$

$$y(t,s)=\sin t+s\cos t \qquad z(t,s)=e^t s^2$$

*Esercizio 3* (7 punti)
Si determini la soluzione $u(x,y,t)$ di

$$\begin{array}{l}u_{xx}+u_{yy}+e^{-t}=u_t \qquad 0<x<1; 0<y<1\\ u(0,y,t)=u(1,y,t)=0; 0\leq y\leq 1 \qquad t>0\\ u_y(x,0,t)=u_y(x,1,t)=0; 0\leq x\leq 1 \qquad t>0\\ u(x,y,0)=0\end{array}$$

**Soluzione** Cerchiamo la soluzione $u(x,y,t) = \sum_{n\geq 1}\sum_{m\geq 0} c_{nm}(t)\sin n\pi x\cos m\pi y$ con $c_{nm}(t)$ soluzione di

$$
\begin{aligned}
&c'_{nm}(t) = -\pi^2[n^2+m^2]c_{nm}(t) + e^{-t}d_{nm}\\
&c_{nm}(0) = 0
\end{aligned}
$$

con

$$
d_{nm} = 4\int_0^1 \sin n\pi x dx \int_0^1 \cos m\pi y dy
$$

Si ha $d_{nm} = 0$ quando $m > 0$, $d_{n0} = \frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]$.

Si ottiene quindi $c_{nm}(t) = 0$ quando $m > 0$, $c_{n0}(t) = \frac{d_{n0}}{\pi^2 n^2 - 1}[1 - e^{-\pi^2 n^2 t}]$.

La soluzione é quindi

$$
u(x,y,t) = \sum_{n\geq 1} c_{n0}(t)\sin n\pi x
$$

*Esercizio 4* ( 6 punti)
Si determini la soluzione dell'equazione

$$
\begin{array}{lll}
u_{tt} = u_{xx} & x > 0 & 0 < t \\
u(x,0) = xe^{-x^2} & u_t(x,0) = 0 & x > 0 \\
u(0,t) = 0 & 0 < t &
\end{array}
$$

**Soluzione**

La soluzione si trova estendendo l'equazione per $x < 0$ e considerando come dato iniziale l'estensione dispari di $u(x,0)$. Poiché $u(x,0)$ é una funzione dispari si ottiene che la soluzione $u$ é la restrizione alla semiretta positiva della soluzione

$$
\begin{array}{lll}
v_{tt} = v_{xx} & x \in \mathbb{R} & 0 < t \\
v(x,0) = xe^{-x^2} & v_t(x,0) = 0 & x > 0 \\
v(0,t) = 0 & 0 < t &
\end{array}
$$

Si ottiene facilmente che

$$
v(x,t) = \frac{1}{2}[(x+t)e^{(x+t)^2} + (x-t)e^{(x-t)^2}]
$$

Si osservi che $v(0,t) = 0$ per $t > 0$.

*Esercizio 5* ( 4 punti)
Sia $u(x,y)$ una funzione armonica in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Sia la circonferenza $C$ di centro l'origine e raggio $\frac{1}{2}$ contenuta in $\Omega$. Si supponga che $u(x,y) = \log[x^2+y^2]$ per $(x,y) \in C$. Si chiede di determinare il valore di $u$ nell'origine.

**Soluzione** Dal teorema del valore medio si deduce che

$$
u(0,0) = -\log 4
$$

*ISTITUZIONI di FISICA MATEMATICA (1 modulo), A.A. 2000/01*
*COMPITO (4/9/01)*

*Esercizio 1* (7 punti)
Data l'equazione

$$\Delta u(x,y)=0 \qquad x^2+y^2<4$$
$$u(x,y)=xy \qquad x^2+y^2=4$$

si chiede:
1)determinare la soluzione
2) rappresentare la soluzione utilizzando il nucleo di Poisson
**Soluzione** In coordinate polari $(r,\theta)$, $xy=r^2\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta$ e quindi sul bordo $x(\theta,r)y(\theta,r)=2\sin 2\theta$. Per separazione di variabile la soluzione é

$$u(r,\theta)=2(\frac{r}{2})^2\sin 2\theta$$

In coordinate cartesiane $u(x,y)=\frac{1}{4}(x^2+y^2)xy$.
Utilizzando l'integrale di Poisson si ottiene

$$u(r,\theta)=\frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(4-r^2)\sin 2\phi}{4+r^2-4r\cos(\theta-\phi)}d\phi$$

*Esercizio 2* (7 punti)
Verificare l'esistenza e determinare la soluzione di

$$u_y+u_x+u^2=1$$
$$u(x,x+x^2)=x \qquad x>0$$

**Soluzione** La condizione di esistenza ed unicitá é verificata per $x>0$. Le equazioni per le caratteristiche sono

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}x(t,s)=1\\
&\frac{d}{dt}y(t,s)=1\\
&\frac{d}{dt}z(t,s)=1-z^2=(1-z)(1+z)\\
&x(0,s)=s \qquad y(0,s)=s+s^2 \qquad z(0,s)=s
\end{aligned}\tag{1}$$

La soluzione, in forma parametrica, é

$$x(t,s)=t+s$$

$$y(t,s)=t+s+s^2 \qquad \frac{1+z(t,s)}{1-z(t,s)}\frac{1-s}{1+s}=e^{2t}$$

Si ricava facilmente

$$s=(y-x)^{\frac{1}{2}} \qquad y>x$$

$$t=x-(y-x)^{\frac{1}{2}}$$

$$z(t(x,y),s(x,y))\equiv u(x,y)=\frac{e^{2[x-(y-x)^{\frac{1}{2}}]}[1+(y-x)^{\frac{1}{2}}]-1+(y-x)^{\frac{1}{2}}}{1-(y-x)^{\frac{1}{2}}+e^{2[x-(y-x)^{\frac{1}{2}}]}[1+(y-x)^{\frac{1}{2}}]}$$

*Esercizio 3* (8 punti)
Si determini la soluzione $u(x,t)$ di

$$\begin{aligned} &u_{xx} - u = u_t \qquad && 0 < x < 1; t > 0 \\ &v(x,0) = 1 \\ &u_x(0,t) = e^{-t} \qquad u(1,t) = e^{-t}; && 0 \le x \le 1 \qquad t > 0 \end{aligned}$$

**Soluzione** Si cerca la soluzione $u(x,t) = xe^{-t} + v(x,t)$, con $v(x,t)$ soluzione di

$$\begin{aligned} &v_{xx} - v = v_t \qquad && 0 < x < 1; t > 0 \\ &v(x,0) = 1 - x \\ &u_x(0,t) = 0 \qquad u(1,t) = 0; && 0 \le x \le 1 \qquad t > 0 \end{aligned}$$

che si risolve per separazione di variabile. Posto

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \cos(n + \frac{1}{2})\pi x$$

si ottiene che $c_n(t)$ é soluzione di

$$\begin{aligned} &c_n'(t) = -[1 - (n + \frac{1}{2})^2\pi^2]c_n(t) \qquad t > 0 \\ &c_n(0) = b_n \qquad c_n'(0) = 0 \end{aligned}$$

dove

$$b_n = 2\int_0^1 (1-x)\cos(n + \frac{1}{2})\pi x dx = \frac{2}{(n+\frac{1}{2})^2\pi^2}$$

La soluzione é

$$c_n(t) = e^{-[1-(n+\frac{1}{2})^2\pi^2]t} b_n$$

Quindi

$$u(x,t) = xe^{-t} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n(t) \cos(n + \frac{1}{2})\pi x$$

*Esercizio 4* (8 punti)
Si determini la soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} &u_{xx} - u_{tt} + u = 0 \qquad && 0 < x < 1 \qquad 0 < t \\ &u(x,0) = x \qquad u_t(x,0) = 0 && x > 0 \\ &u(0,t) = u(1,t) = 0 && 0 < t \end{aligned}$$

**Soluzione** Per separazione di variabile

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin n\pi x$$

con

$$\begin{aligned} &c_n''(t) = -[-1 + n^2\pi^2]c_n(t) \qquad t > 0 \\ &c_n(0) = b_n \qquad c_n'(0) = 0 \end{aligned}$$

con

$$b_n = 2\int_0^1 x \sin n\pi x dx = -2\frac{1}{n\pi}(-1)^n$$

La soluzione é

$$c_n(t) = b_n \cos\sqrt{(n^2\pi^2 - 1)}t$$